Η συμβολή της πολιτισμικής-ιστορικής παραμέτρου στον χειρισμό Γεωμετρικών προβλημάτων.
Μια εμπειρική έρευνα για τον τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων μέτρησης επιφανειών από μαθητές της Α' Λυκείου[1].

Κώστας Ζαχάρος

Οι εκπαιδευτικοί στην άσκηση του έργου τους βασίζονται σε κάποια θεωρία μάθησης ανεξάρτητα από την ικανότητά τους να την διατυπώνουν ή όχι. Και αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί η διδασκαλία, ως εμπρόθετη και σκόπιμη πράξη, συνδέεται με κάποια θεωρία, διαφορετικά είναι τυφλή και άσκοπη.

Τι είναι όμως μια θεωρία μάθησης; Όπως μας λέει ο Bigge M. [1986, σελ.18] "είναι μια ολοκληρωμένη συστηματική άποψη για τη φύση της διαδικασίας μέσα από την οποία οι άνθρωποι σχετίζονται με το περιβάλλον της με τέτοιο τρόπο, ώστε να επαυξάνουν την ικανότητά τους στο να χρησιμοποιούν πιό αποτελεσματικά τόσο τους εαυτούς τους, όσο και το περιβάλλον τους".

Οι διάφορες θεωρίες μάθησης καθώς και οι ψυχολογικές θεωρίες βασίζονται σε μια φιλοσοφική θεώρηση της φύσης του ανθρώπου. Υπάρχει δηλαδή ένας πυρήνας απόψεων τόσο για την φύση του ανθρώπου από ηθική σκοπιά π.χ. καλός, κακός, ουδέτερος, όσο και για την "δρασιακή" [Bigge, 1990] φύση του, δηλαδή τη σχέση του υποκειμένου με το περιβάλλον του. Οι σχέσεις αυτές μπορεί να χαρακτηρίζονται ως *ενεργητικές*, όταν το υποκείμενο είναι ψυχολογικά δραστήριο από μια ενδογενώς προερχόμενη δύναμη, *παθητικές*, όταν το υποκείμενο συγκροτεί τη νόησή του κύρια σαν αποτέλεσμα της επίδρασης του περιβάλλοντος και *αλληλεπιδραστικές*, όταν η συγκρότηση της ψυχολογικής πραγματικότητας του υποκειμένου είναι αποτέλεσμα του τρόπου με τον οποίο αυτό κατανοεί την κοινωνική πραγματικότητα.

Μία σύντομη κριτική παρουσίαση κάποιων κυρίαρχων θεωριών μάθησης που ασκούν επιρροή στην εκπαιδευτική πρακτική θα αιτιολογήσει και την επιλογή στο μοντέλο που, κατά την άποψή μας, θα ερμηνεύει πληρέστερα τα πειραματικά μας δεδομένα.

Σκοπός της έρευνας που θα παρουσιάσουμε είναι πρώτον, να εξετάσει αν η πολιτισμική και ιστορική διάσταση που ενσωματώνεται στα προτεινόμενα "εργαλεία" για την αντιμετώπιση προβλημάτων με εμβαδά και τα οποία σχετίζονται άμεσα με τα προτεινόμενα έργα, συμβάλλει αποτελεσματικότερα στην αντιμετώπισή τους. Δεύτερον,

---

1 Ζαχάρος, Κ. (1996). Η συμβολή της πολιτισμικής-ιστορικής παραμέτρου στον χειρισμό Γεωμετρικών προβλημάτων. Μια εμπειρική έρευνα για τον τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων μέτρησης επιφανειών από μαθητές της Α' Λυκείου. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, τόμος 24/96, σελ. 169-199.

κατά πόσο τα εργαλεία αυτά "υποβάλουν" στους μαθητές τρόπους επίλυσης. Τέλος, θα διερευνήσουμε τη συμβολή της διδασκαλίας ιδιαίτερα, όταν αυτή εμπεριέχει στοιχεία που σχετίζονται με την ιστορική εξέλιξη της εξεταζόμενης έννοιας.

Η πρώτη υπόθεση βασίζεται στο θεωρητικό έργο ψυχολόγων οι οποίοι δίνουν μεγάλο βάρος στην πολιτισμική-κοινωνική επίδραση κατά την νοητική συγκρότηση των επιστημονικών εννοιών [Βυγκότσκι, 1988].

Στην δεύτερη υπόθεση θα ελέγξουμε αν το σύνολο των προτεινόμενων εργαλείων επηρεάζει την οργάνωση της λειτουργίας των ανθρώπινων δραστηριοτήτων στην διάρκεια της χρήσης τους [Nunes, 1992].

Τέλος η τρίτη, παραπέμπει στην άποψη της διδακτικής των Μαθηματικών για τον χρησιμότητα της γνώσης της ιστορίας της εξεταζομενης έννοιας κατά την διδασκαλία της [Sierpihska, 1991].

1. **Θεωρητικό Πλαίσιο**

Ο συμπεριφορισμός ειναι η θεωρία που, αν και στο χώρο της ψυχολογίας έχει δεχτεί έντονη κριτική, στο χώρο της εκπαίδευσης και ιδιαίτερα στην διδασκαλία των μαθηματικών ασκεί έντονη επίδραση [Βοσνιάδου, 1995].

Στο επίπεδο της μεθόδου, η θεωρία αυτή πιστεύει πως, για να διαφυλάξει η επιστήμη την αντικειμενικότητά της πρέπει να ασχολείται με φαινόμενα που είναι άμεσα προσιτά στις αισθήσεις και να αποφεύγει τις αναφορές σε υποθέσεις που παρεμβάλλουν διάφορους μη αντιληπτούς δεσμούς ανάμεσα σε ερεθίσματα και απαντήσεις.

Η αλληλεπίδραση του οργανισμού με το περιβάλλον στηρίζεται στην παθητική στάση του ατόμου έναντι του ερεθίσματος. "Έτσι η αλληλεπίδραση παίρνει παθητικό χαρακτήρα. (Αλλά και το περιβάλλον είναι επίσης παθητικό, με την έννοια ότι κιαυτό "περιμένει" τον οργανισμό να επενεργήσει πάνω του)" [Bigge, 1990, σελ.107]. Η υποκίνηση της ανθρώπινης συμπεριφοράς κατανοείται με τρόπο μηχανιστικό και στηρίζεται στην βασική θεώρηση του συμπεριφορισμού που, όσο και αν αυτό είναι σχηματικό, τείνει να θεωρεί τον άνθρωπο σαν μια σύνθετη μηχανή. Έτσι είναι λογικό σε μια μηχανή να μην υπάρχει *εμπρόθετη* συμπεριφορά.

Η εκπαιδευτική προέκταση του συμπεριφορισμού βλέπει τα ανθρώπινα όντα σαν καλοσχεδιασμένες μηχανές που μαθαίνουν με μια προοδευτική συσσώρευση γνώσεων, με μια προσθετική διαδικασία. Η ύλη επιλέγεται αυστηρά από τους διδάσκοντες οι οποίοι κρίνουν το κατά πόσο στις υπάρχουσες κοινωνικές συνθήκες θα δημιουργήσει τις επιθυμητές εξαρτήσεις. Για παράδειγμα για την διδασκαλία ο Skinner προτείνει την *προγραμματισμένη διδασκαλία* [Παπαμιχαήλ, 1988, Ραβάνης, 1992-1993]. Η ύλη είναι προκαθορισμένη και αναλύεται σε μικρά διακριτά μέρη. Έχουμε μια βαθμιαία και τμηματική μάθηση και η ενίσχυση, βασικό συστατικό της εκπαιδευτικής διαδικασίας, στοχεύει στο να δίνει στον μαθητή τη σωστή απάντηση ή να του επιτρέπει την μετάβαση στο επόμενο στάδιο αφού υπάρξει επιτυχής απάντηση. Η προγραμματισμένη διδασκαλία μπορεί να πραγματοποιηθεί με ή χωρίς τη χρήση διδακτικών μηχανών που είναι συστήματα μηχανικά που κατευθύνουν τον μαθητή στην επιθυμητή απάντηση πριν πάρει την ενίσχυση. Η συμπεριφορική άποψη για την διδασκαλία βασίζεται σε ένα επεξεργασμένο σύστημα αξιολόγησης των διδακτικών στόχων. Η αξιολόγηση αφορά σε συμπεριφορές που είναι εμφανείς και δυνάμενες να διατυπωθούν λεκτικά ή γραπτά. Συνεπώς λειτουργίες όπως η διαίσθηση, ο στοχασμός, ο συλλογισμός, η φαντασία, κλπ. στοιχεία που ενεργοποιούνται στην διάρκεια της μαθηματικής δραστηριότητας, είναι ξεκάθαρο πως δεν έχουν θέση σ'ένα πρόγραμμα σχεδασμένο με τα συμπεριφοριστικά πρότυπα γιατί δεν παράγουν μετρήσιμες εμφανείς συμπεριφορές [Bigge, 1990].

Σε αντίθεση με την άποψη του συμεριφορισμού που υποστηρίζει την αισθητηριακή προέλευση της γνώσης, ο Piaget, έχοντας σαν πρότυπο την μαθηματική θεωρία των αλγεβρικών δομών της σχολής Bourbaki, ορίζει την γένεση και την δομή των γνώσεων με ανάλογο προς την θεωρία των αλγεβρικών δομών τρόπο [Piaget, 1979b]. Στο έργο του, κεντρική θέση στην νοητική ανάπτυξη του ατόμου κατέχει η προσπάθεια της προσαρμογής του στο περιβάλλον.

Παρόλο που ο Piaget αναγνωρίζει πως η σκέψη του παιδιού δεν παράγεται μόνο από τους έμφυτους ψυχολογικούς παράγοντες και την επίδραση του φυσικού περιβάλλοντος και τονίζει την σημασία των σχέσεων και της αλληλεπίδρασης του παιδιού και του κοινωνικού περιβάλλοντος στην γνωστική ανάπτυξη [Piaget, 1979a], το πιαζετικό θεωρητικό πρότυπο αντιλαμβάνεται τον κοινωνικό παράγοντα ως εξωτερικό προς το παιδί, στηρίζεται στο σχήμα *υποκείμενο-αντικείμενο* και παρουσιάζει τα στάδια των γενικών ικανοτήτων των παιδιών χωρίς να ασχοληθεί με το ιδιαίτερο περιεχόμενο της γνώσης όπως αυτή συγκροτείται στα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια.

Όμως τα παιδιά οδηγούνται στην ανακάλυψη των λογικών εννοιών και στην συνέχεια στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και του χειρισμού τυπικών μαθηματικών προβλημάτων, μέσα από σύνθετες καταστάσεις όπου ο ρόλος της κοινωνικής μεταβλητής είναι εμφανής.

Αντίθετα, σε άλλες προσεγγίσεις τονίζεται η σημασία της κοινωνικής και πολιτισμικής προοπτικής στην γνωστική ανάπτυξη [Βυγκότσκι, 1988]. Η άποψη αυτή θεωρεί πως, το παιδί από τις πρώτες μέρες τις ζωής του, λαμβάνει μέρος στην κοινωνική ζωή στην οποία ανήκει, είναι μέρος του κοινωνικού όλου και είναι ενεργό υποκείμενο στην διαμόρφωση των κοινωνικών σχέσεων.

Μέσα σ'αυτό το θεωρητικό πλαίσιο ερμηνείας της νοητικής ανάπτυξης, παρατηρείται μια εμπρόθετη ενεργοποίηση των ψυχολογικών μηχανισμών της μάθησης που ξεκινά από ένα πρόβλημα στην επίλυση του οποίου είναι ενταγμένη όλη η δραστηριότητα και οι πράξεις του υποκειμένου και οι οποίες "καθορίζονται ... από μιάν ιδιαίτερα προσδιοριστική τάση που εκπορεύεται απο την παράσταση του *σκοπού*" [Βυγκότσκι, 1988, σελ. 138]. Επιπρόσθετα, η διαμεσολάβηση και χρήση των πολιτισμικών "εργαλείων" είναι "κεντρικό πρόβλημα της ερμηνείας όλων των ανώτερων μορφών συμπεριφοράς, ... με την βοήθεια των οποίων μαθαίνει ο άνθρωπος να κυριαρχεί στην συμπεριφορά του" και "όλες οι ανώτερες ψυχικές λειτουργίες περιέχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι είναι διαμεσολαβημένες διαδικασίες, δηλ. ότι εμπεριέχουν στην δομή τους την *χρήση ενός σημείου ως μέσου* για την καθοδήγηση και κυριάρχηση των ψυχικών διαδικασιών" [Βυγκότσκι, 1988, σελ. 14].

Στην ίδια κατεύθυνση, οι Doise και Mugny [1987], τονίζουν την βαρύνουσα σημασία των κοινωνικών και πολιτισμικών παραμέτρων στην γνωστική ανάπτυξη και υποστηρίζουν τον αιτιακό ρόλο που διαδραματίζει η κοινωνική αλληλεπίδραση στη πορεία συγκρότησης της νοημοσύνης. Οι εκφραστές της άποψης αυτής προτείνουν ένα κοινωνικό ορισμό για την νοημοσύνη, που ενσωματώνει, την πιαζετική γενετική εκδοχή για την προοδευτική συγκρότηση των γνωστικών μηχανισμών στο παιδί. Από την άλλη, οριοθετούνται από την πιαζετική προσέγγιση που μελετάει την νοημοσύνη κύρια ως ένα ατομικό χαρακτηριστικό, γεγονός που αποτελεί μια αφαίρεση, καθώς αυτή απομονώνει το άτομο από το κοινωνικό πλαίσιο εντός του οποίου συντελείται η ανάπτυξη της νοημοσύνης του.

Η αναγκαιότητα όμως της αναζήτησης των ειδικών γνώσεων και των ικανοτήτων που σχετίζονται με τις καταστάσεις και τα προβλήματα που υπάρχουν κατά την διαδικασία της μάθησης, οδήγησαν άλλους ερευνητές στην εισαγωγή της έννοιας του *"εννοιολογικού πεδίου"* (conceptual field) [Vergnaud, 1983]. Το εννοιολογικό πεδίο είναι ένα σύνολο καταστάσεων και προβλημάτων στις οποίες συνυπάρχουν έννοιες, διαδικασίες και αναπαραστάσεις, που παρόλες τις διαφορές τους έχουν στενή συνάφεια.

Ο Vergnaud, αιτιολογεί την αναγκαιότητα της ύπαρξης ενός τέτοιου πλαισίου υποστηρίζοντας πως ,πολλές φορές, είναι δύσκολο και ανόητο να μελετούνται χωριστά έννοιες που έχουν συνάφεια. Θεωρεί, πως όταν προσεγγίζουμε ψυχογενετικά μια ειδική γνώση είναι προτιμότερο να αναφερόμαστε σε ευρείες περιοχές της γνώσης που να καλύπτουν μια ευρεία ποικιλία καταστάσεων και διαφορετικά είδη και επίπεδα ανάλυσης. Τέλος, η αναγκαιότητα εισαγωγής ενός τέτοιου πλαισίου προκύπτει από το γεγονός ότι, κατά την εκτέλεση από τους μαθητές προβλημάτων της ίδιας κατηγορίας, εμπλέκονται συνήθως, διαφορετικές διαδικασίες και έννοιες και επίσης μια διαφορετική συμβολική αναπαράσταση.

Το ερμηνευτικό πρότυπο που θα υιοθετήσουμε διαφοροποιείται από το πιαζετικό μοντέλο *υποκείμενο-αντικείμενο* και στηρίζεται στο σχήμα που μας προτείνουν οι Doise - Mugny [1987]*υποκείμενο-άλλος-αντικείμενο*. Κατά την άποψή μας, η θεώρηση αυτή, ερμηνεύει πληρέστερα τα πειραματικά μας δεδομένα. Εδώ, είναι εμφανής η συστηματική εμπλοκή της κοινωνικής μεταβλητής στην διαδικασία της μάθησης, γεγονός που ασκεί μια σαφή επιρροή στις στάσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών απέναντι στα γνωστικά αντικείμενα και βελτιώνει το κοινωνικο-ψυχολογικό κλίμα προς μια κατεύθυνση που ευνοεί τη μάθηση. Ταυτόχρονα η χρήση ενός *κοινωνικά σημασιοδοτημένου υλικού ή κανόνων*, που χρησιμεύουν ως ενδιάμεσα στις σχέσεις των μαθητών και των γνωστικών προσπαθειών που αναλαμβάνονται συμβάλλει θετικά στη γνωστική ανάπτυξη. Σύμφωνα με τους Doise - Mugny υπάρχει κοινωνική σήμανση όταν υφίσταται μια αμφίδρομη αντιστοιχία μεταξύ των κοινωνικών σχέσεων οι οποίες χαρακτηρίζουν την αλληλεπίδραση των ατόμων που εμπλέκονται σε μια κατάσταση και των γνωστικών σχέσεων που σχετίζονται με τις ιδιότητες των πραγμάτων που διαμεσολαβούν σε αυτές τις κοινωνικές σχέσεις. Η εγγραφή των γνωστικών προσπαθειών μέσα σε ένα πλαίσιο με κάποια κοινωνική σημασία μπορεί να οδηγήσει σε γνωστικές ρυθμίσεις.

Στην εργασία αυτή προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε τις δυνατότητες των μαθητών της Α' Λυκείου να υπολογίσουν το εμβαδόν διαφόρων σχημάτων καθώς και την περίμετρό τους.

Οι μαθητές που αποτέλεσαν το δείγμα μας έχουν, σύμφωνα με το πιαζετικό θεωρητικό πρότυπο, κατακτήσει την *διατήρηση* της έννοιας του εμβαδού [Piaget,Inhelder,Szeminka, 1960] και οικοδομήσει τις τυπικές λειτουργίες της σκέψης. Έτσι λοιπόν η έρευνά μας δεν προσανατολίστηκε στην διερεύνηση της δυνατότητας πρόσκτησης από τους μαθητές της έννοιας του εμβαδού.

Η διδακτική παρέμβαση στην οποία υποβλήθηκε η πειραματική ομάδα κινείται στα πλαίσια της προσέγγισης της διδακτικής των μαθηματικών που υποστηρίζει "πως η σημασία μιας έννοιας δεν καθορίζεται ολοκληρωτικά από το σημερινό της ορισμό αλλά είναι συνισταμένη της ιστορίας της στο παρελθόν όσο και σήμερα... " και ότι "...η γνώση της ιστορίας των εννοιών είναι πολύ χρήσιμη στις έρευνες για τη διάγνωση των δυσκολιών των μαθητών" [Sierpihska, 1991]. Πρόκειται για μια ιστορική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία κατά τη διαδικασία πρόσκτησης μιας μαθηματικής έννοιας αξιοποιείται διδακτικά η ιστορία αυτής της έννοιας.

Παρόλο που τα περισσότερα βιβλία των μαθηματικών μας κάνουν να πιστεύουμε πως, οι μαθηματικοί ασχολούνται μόνο με τυπικές και αυστηρές αποδείξεις βασισμένες σε αξιώματα, οι μαθηματικοί συχνά εργάζονται με διαισθητικές, ή εμπειρικές μεθόδους. Στην πραγματικότητα, η διαδικασία παραγωγής των μαθηματικών είναι εντελώς διαφορετική από τον παραγωγικό τρόπο της παρουσίασής τους. Στην διαδικασία δημιουργίας των μαθηματικών, τίθενται προβλήματα, αναλύονται παραδείγματα, γίνονται υποθέσεις, προσφέρονται αντιπαραδείγματα, και υποθέσεις αναθεωρούνται. Επειδή τα μαθηματικά εμφανίζονται από τους μαθηματικούς τυποποιημένα σε θεωρήματα και αποδείξεις, αυτή η αυστηρή διαδικασία εμφανίζεται λαθεμένα σαν ο πυρήνας της μαθηματικής πρακτικής. Έτσι η μάθηση των μαθηματικών φαίνεται να είναι η ικανότητα αυτής της τυποποίησης. Η παρουσίασή τους εξαφανίζει την πνευματική δραστηριότητα από την οποία έχουν παραχθεί [Battista, Clements, 1995 και Hoffer, 1981].

Η αξιοποίηση της ιστορικής προοπτικής κατά την διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών διευκολύνει στην πληρέστερη κατανόησή τους. Γιατί δεν πρέπει να διαφεύγει της προσοχής μας πως πριν εξελιχθεί η Γεωμετρία σε μια θεωρητική λογική κατασκευή αποτελεί καταρχήν ένα ανθρώπινο γνωστικό εφόδιο που ορίζει τις σχέσεις του ανθρώπου με το χώρο και το περιβάλλον του. Παράλληλα, μας δίνεται η δυνατότητα να εντοπίσουμε επιστημολογικά και διδακτικά εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών.

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η μέτρηση προϋποθέτει τη σύγκριση μεγεθών γεγονός που μας οδηγεί στον προσδιορισμό της έννοιας της ισότητας. Και η ισότητα των μεγεθών θα διαπιστωθεί με την *αρχή της επίθεσης*. Έτσι ως ίσα ορίζονται δύο μεγέθη που επιθέτοντας το ένα στο άλλο διαπιστώνουμε την ισότητά τους [Bkouche, 1992]. Και ενώ στον σύγχρονο τρόπο διαπραγμάτευσης του θέματος του εμβαδού ενός σχήματος, καθώς και του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος, τα μεγέθη αυτά εκφράζονται με ένα αριθμό, ο Ευκλείδης, "*όταν ήθελε να δείξει ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά απόδειχνε ότι το ένα απ'αυτά μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε αν κατάλληλα αναπροσαρμοστούν να παράγουν το άλλο σχήμα* [Bunt, Jone, Bedient, 1981]. Η εισαγωγή στην έννοια του εμβαδού που γίνεται στα βιβλία των μαθηματικών τόσο της Α\μιας, όσο και της Β\μιας εκπαίδευσης, δείχνει την επιρροή του αλγεβρικού συμβολικού τρόπου σκέψης, αφού η βαρύτητα δίνεται στις ποσοτικές εκφράσεις (τους αλγεβρικούς τύπους). Αντίθετα, σε νεότερες έρευνες που στηρίζονται κύρια σε ποιοτικές μεθόδους προσδιορισμού του εμβαδού επιφανειών και δίνουν έμφαση στην αντιστοιχία ανάμεσα στην διάσταση της μονάδας μέτρησης και της μετρούμενης επιφάνειας οι επιτυχίες των παιδιών είναι σημαντικά καλύτερες σε σύγκριση με τις παραδοσιακές σχολικές μεθόδους [Nunes, Light, Mason, 1993].

Συνοψίζοντας, η τυπική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της μαθηματικής σκέψης υπό μορφή αξιωματική έχει μεγάλη σημασία στην επιστημονική κοινότητα των μαθηματικών σαν μέθοδος παρουσίασης της ισχύος κάποιων ιδεών. Είναι όμως υπό σηζήτηση το άν ο τρόπος αυτός είναι ο πλέον ενδεδειγμένος παιδαγωγικά για την διδασκαλία των μαθηματικών. Ερώτημα επίσης αποτελεί, το άν οι μαθητές αντιλαμβάνονται με αυτόν τον τρόπο παρουσίασης την σπουδαιότητα των μαθηματικών ή τα εκλαμβάνουν σαν ένα σύνολο τυπικών κανόνων χωρίς καμία σύνδεση με την προσωπική τους μαθηματική δραστηριότητα.

2. Μέθοδος, δείγμα και πειραματικός σχεδιασμός της έρευνας.

Η μέθοδος

Σκοπός της έρευνάς μας είναι να διερευνήσουμε την ορθότητα τριών βασικών υποθέσεων:

Πρώτον, ότι η ψυχολογική στάση των μαθητών στη αντιμετώπιση προβλημάτων μέτρησης επιφανειών αλλάζει στο βαθμό που τα προτεινόμενα εργαλεία ενσωματώνουν ένα πολιτισμικό σύστημα σημείων, που στην περίπτωση του εμβαδού σχετίζεται και με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας αυτής. Παράλληλα, υπάρχει αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των έργων, στο βαθμό που υπάρχει μια αντιστοιχία στην διάσταση της μονάδας μέτρησης και της μετρούμενης επιφάνειας [Nunes, Light, Mason,1993].

Δεύτερον, ότι τα προτεινόμενα εργαλεία για την αντιμετώπιση του έργου "υποβάλουν" στους μαθητές και τρόπους επίλυσης. Η χρήση δηλαδή διαφορετικών τύπων συμβολικών συστημάτων επιδρά και αλλάζει τον τρόπο δραστηριότητας των μαθητών παρόλο που το έργο που καλούνται να εκτελέσουν είναι το ίδιο.

Τρίτον, η χρήση της ιστορικής προοπτικής στη διδασκαλία συμβάλλει θετικά στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού [Ζαχάρος, 1995] και στην αντιμετώπιση προβλημάτων με επιφάνειες.

Επιπλέον, θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε πιθανή συνάφεια μεταξύ του φύλου των μαθητών και των γνωστικών προσπαθειών που αναλαμβάνονται.

Πρόθεσή μας είναι να εντοπιστούν πιθανές αιτιακές σχέσεις ανάμεσα στην εισαγωγή των ανωτέρω *ανεξάρτητων μεταβλητών* [Campbell, Stanley,1974, Παπακωνσταντίνου, 1990] και των γνωστικών αποτελεσμάτων που συνεπάγεται η δράση τους. Παράλληλα οι *εξαρτημένες μεταβλητές,* δηλαδή το επίπεδο της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών, αντλούνται από το πιαζετικό θεωρητικό πρότυπο.

Στη μεθοδολογία και τον πειραματικό σχεδιασμό της έρευνας επιχειρούμε με την κατάλληλη επιλογή διδακτικού υλικού να δημιουργήσουμε διδακτικές καταστάσεις-προβλήματα (situations problems)" [Laborde, 1985] προσαρμοσμένα στις γνώσεις και στις αντιληπτικές δυνατότητες των μαθητών. Έτσι, κριτήριο για το σχεδιασμό της "κατάστασης-πρόβλημα" είναι η έννοια που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί και κατασκευαστεί από το μαθητή να δικαιολογείται πλήρως από την κατάσταση και η "κατάσταση-πρόβλημα" που προτείνεται να επιτρέπει μια γόνιμη αλληλεπίδραση με το μαθητή [Laborde, 1989].

Το ενδιαφέρον μας από διδακτική άποψη είναι να αναδείξουμε το γεγονός πως, "το πέρασμα στο αποδεικτικό στάδιο μοιάζει να προκλήθηκε από την αντιμετώπιση ενός προβλήματος (αυτή η ανάγκη επίλυσης ενός προβλήματος δίνει έννοια στην απόδειξη) και όχι μόνο η θέληση να γίνουν τα Μαθηματικά αυστηρά" [Arsac, 1991].

Το δείγμα

Το δείγμα της έρευνας συγκροτήθηκε από 62 μαθητές δύο τμημάτων της Α' Λυκείου του 1ου ΤΕΛ Δραπετσώνας. Στο πρώτο φύλλο εργασίας συμμετείχαν 57 μαθητές, ενώ στο δεύτερο 60. Οι διαφορές στο αριθμό των μαθητών στις δύο πειραματικές διαδικασίες οφείλονται στην απουσία κάποιων μαθητών τις μέρες που διενεργήθηκαν οι δραστηριότητες αυτές. Κριτήριο για την επιλογή του δείγματος από μαθητές της Α' Λυκείου είναι ότι, οι μαθητές αυτοί έχουν διδαχθεί την έννοια του εμβαδού (ήδη από την Δ' Δημοτικού, Α' και Β' Γυμνασίου) καθώς και τρόπους υπολογισμού του εμβαδού επιφανειών. Επι πλέον το γνωστικό αυτό αντικείμενο δεν διδάσκεται στους μαθητές της Α' Λυκείου, ώστε να επηρεαστούν έντονα κατά την διαδικασία εκτέλεσης των έργων από τις σχολικές πρακτικές που χρησιμοποιούν κύρια αλγεβρικές μεθόδους (τύπους) εύρεσης εμβαδών.

Η ομοιογένεια στις επιδόσεις των μαθητών των δύο τμημάτων είναι εξασφαλισμένη αφού, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, στην βαθμολογία στο μάθημα των μαθηματικών, δεν παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις.

Ο πειραματικός σχεδιασμός

Το πειραματικό μας σχέδιο συγκρίνει τις επιδόσεις δύο ομάδων. Οι δύο ομάδες, η μια *πειραματική* και η άλλη *ελέγχου*, συγκροτούνται με την τυχαία επιλογή του ενός τμήματος ως πειραματικής ομάδας και του άλλου ως ομάδας ελέγχου, χωρίς προέλεγχο. Οι παρατηρήσεις, πραγματοποιούνται και συγκρίνονται για τις δύο ομάδες μετά την πειραματική παρέμβαση [Leon, 1977, Campbell, Stanley, 1974]. Κριτήριο για να θεωρηθεί η εκτέλεση ενός έργου επιτυχής δεν είναι τόσο το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα, όσο η σωστή επιλογή μεθόδου και η γενικά σωστή εκτέλεση της διαδικασίας που επιλέγεται.

Οι μαθητές εργάστηκαν σε σχολικές αίθουσες, όπου κάθε μαθητής δουλεύει ατομικά και η διάρκεια εργασίας είναι μία διδακτική ώρα. Το πείραμα εκτελείται σε δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους που απέχουν περίπου ένα μήνα και οι δύο ομάδες καλούνται να εκτελέσουν το ίδιο κάθε φορά έργο που είναι η συμπλήρωση ενος φύλλου εργασίας (βλέπε φύλλο εργασίας 1 και 2).

Στο φύλλο εργασίας 1 ζητείται και από τις δύο ομάδες η εκτέλεση 5 έργων. Σε όλα τα έργα ζητείται ο υπολογισμός και η σύγκριση επιφανειών, ενώ στο 3ο, 4ο και 5ο έργο ζητείται επιπλέον ο προσδιορισμός των περιμέτρων των σχημάτων.

Στην ομάδα ελέγχου, το εργαλείο που δίνεται στους μαθητές για την εκτέλεση του έργου είναι ένας διαβαθμισμένος χάρακας. Στην πειραματική ομάδα, στο φύλλο εργασίας δίνεται σχεδιασμένο 1 cm^2 που προτείνεται ως μονάδα εμβαδού. Σαν βοηθητικό εργαλείο στην εκτέλεση των έργων, δίνεται σε κάθε μαθητή ένας αδιαβάθμητος χάρακας που διευκολύνει τους μαθητές στην χάραξη ευθειών.

Μετά την εκτέλεση της πειραματικής διαδικασίας ακολουθεί διδασκαλία πάνω ιστορική εξέλιξη της έννοιας του εμβαδού και πως γίνεται η διαπραγμάτευση της έννοιας αυτής από τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Στην διδασκαλία αυτή συμμετέχει μόνο η πειραματική ομάδα και πρόθεσή μας είναι να ελέγχξουμε τα αποτελέσματα αυτής της διδακτικής παρέμβασης.

Στην διδακτική μας παρέμβαση παρουσιάζουμε με παραδείγματα τον τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης σύγκρινε τα εμβαδά δύο επιφανειών. Προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η μία επιφάνεια μπορεί να χωριστεί σε τμήματα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε, με μια κατάλληλη αναπροσαρμογή, να παράγει το άλλο σχήμα. Τονίζουμε ότι ο Ευκλείδης δεν προσδίδει μια αριθμητική τιμή στις επιφάνειες. Η μέθοδός του παρόλο που είναι πολύπλοκη, είναι ποιοτική και διατηρούνται τα φυσικά χαρακτηριστικά των εξεταζόμενων μεγεθών. Στην συνέχεια, εισάγεται η έννοια της μονάδας μέτρησης και επιχειρούμε την μέτρηση επιφανειών με την χρήση διαφόρων τέτοιων μονάδων, όπως για παράδειγμα, την επιφάνεια του σφουγγαριού, ένα φύλλο χαρτιού, κλπ.. Επιθέτουμε τις μονάδες αυτές στην μετρούμενη επιφάνεια και ενώ δεν έχουμε την ακρίβεια που μας δίνουν οι τύποι με τις αριθμητικές εκφράσεις, ωστόσο,με τον τρόπο αυτό έχουμε κάποιες προσεγγίσεις του εμβαδού των επιφανειών καθώς και την δυνατότητα σύγκρισης επιφανειών σε σχήματα περίπλοκα που η χρήση των γνωστών τύπων είναι δύσκολη.

Στην συνέχεια γίνεται αναφορά στην μέθοδο της " *εξάντλησης* " που χρησιμοποιείται από τον Αρχιμήδη στην εύρεση του εμβαδού του κυκλικού δίσκου και του παραβολικού χωρίου [Αρχιμήδους Άπαντα, 1973], καθώς και στην σύγχρονη χρήση της μεθόδου αυτής στα *αθροίσματα Riemann* και στα αντίστοιχα ολοκληρώματα.

Στό φύλλο εργασίας 2 περιέχονται, όπως και στο φύλλο 1, πέντε έργα, εκ των οποίων τα τέσσερα είναι διαφορετικά, αλλά ανάλογης δυσκολίας με τα αντίστοιχα του φύλλου εργασίας 1. Το 5ο έργο διαφοροποιείται, καθώς σαν μονάδα μήκους και εμβαδού δίνονται μονάδες διαφορετικές από το συνήθες 1 cm και το 1 cm^2 (βλέπε φύλλο εργασίας 2). Με το έργο αυτό θελήσαμε να έχουμε κάποιες πρώτες ενδείξεις για την δυνατότητα αποδέσμευσης των μαθητών από τις συνήθεις μονάδες μέτρησης και την γενίκευση των γνωστικών δυνατοτήτων τους στην μέτρηση μηκών και επιφανειών [Battista, 1982].

Αφού εξηγήθηκε στους μαθητές αναλυτικά το έργο που θα πρέπει να εκτελέσουν, γίνονται οι αναγκαίες υποδείξεις και ενθαρρύνονται ώστε να μη παραιτηθούν από την προσπάθεια.

3. Τα αποτελέσματα της έρευνας.

Φύλλο εργασίας 1.

Στο πρώτο φύλλο εργασίας, στην ομάδα ελέγχου, συμμετέχουν 31 μαθητές. Στα έργα των εμβαδών, στο 1ο έργο που αναφέρεται στον υπολογισμό του εμβαδού ορθογωνίου, παρατηρούμε σωστές απαντήσεις στο 61% των μαθητών, ενώ στα άλλα έργα που τα σχήματα γίνονται συνθετότερα και διαφέρουν από τα συνήθη "κανονικά" γεωμετρικά σχήματα οι επιτυχίες κρίνονται ιδιαίτερα χαμηλές (32% στο 2ο και 3ο έργο, 29% στο 4ο έργο και 26% στο 5ο έργο) (πίνακας 1).

	1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	19(61%)	10(32%)	10(32%)	9(29%)	8(26%)
αποτυχία	12(39%)	21(68%)	21(68%)	22(71 %)	23(74%)

Πίνακας 1
Οι επιτυχίες των μαθητών της ομάδας ελέγχου.
(φύλλο εργασίας 1)

Το λάθος που συνηθέστερα συναντάμε στο πρώτο έργο (από 4 μαθητές), είναι η χρησιμοποίηση του τύπου εύρεσης εμβαδού τριγώνου. Δύο μαθητές επίσης θεωρούν ότι Ε = μήκος + πλάτος, ενώ σε άλλη περίπτωση γίνεται προσπάθεια χρησιμοποίησης του τύπου του τραπεζίου, με λαθεμένο όμως τρόπο (χρησιμοποιούνται σαν βάσεις δύο συνεχόμενες πλευρές του ορθογωνίου).

Στο δεύτερο έργο, αρκετοί μαθητές, χωρίζουν την επιφάνεια σε οικεία γιαυτούς σχήματα, όπως τρίγωνα, ορθογώνια και τραπέζια. Μεταξύ των μαθητών αυτών είναι και εκείνοι που δίνουν τις σωστές απαντήσεις. Είναι αξιοπρόσεκτο, πως, οι μαθητές αποφεύγουν την δημιουργία του σχήματος του τραπεζίου κατά τον χωρισμό της επιφάνειας, γεγονός που, όπως δηλώθηκε από μαθητή, έγινε συνειδητά γιατί δεν θυμόταν τον τύπο εύρεσης εμβαδού τραπεζίου. Όσες φορές πάλι, εμφανίζεται το σχήμα του τραπεζίου, έχουμε συνήθως λαθεμένες απαντήσεις (πχ. ένα σύνηθες λάθος που γίνεται στην χρήση του τύπου είναι, ότι Ε = Β Χβ /2). Μερικοί από τους μαθητές που δεν χωρίζουν την επιφάνεια συγχέουν το εμβαδόν με τη περίμετρο και θεωρούν σαν εμβαδό, είτε το άθροισμα των πλευρών, είτε το γινόμενο όλων των πλευρών.

Οι μαθητές που χρησιμοποιούν τον τύπο εύρεσης του εμβαδού τριγώνου για το ορθογώνιο του πρώτου έργου, επαναλαμβάνουν το λάθος και στο τρίτο έργο. Το λάθος που συνήθως γίνεται εδώ (5 μαθητές) είναι, ότι η επιφάνεια Β αντιμετωπίζεται σαν ορθογώνιο και χρησιμοποιείται ο τύπος Ε = αΧβ. Σε άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιείται το άθροισμα του γινομένου των απέναντι πλευρών πχ., E_A = 3Χ3 + 2Χ2 = 13 και E_B = 3Χ3 + 1Χ6 = 15 και σε μία άλλη περίπτωση το εμβαδό του σχήματος Β θεωρείται ίσο με το γινόμενο των πλευρών (E_B = 3Χ3Χ1Χ1Χ1Χ1Χ1Χ1).

Στο τέταρτο έργο, οι μαθητές που δίνουν σωστές απαντήσεις χωρίζουν τις επιφάνειες Β και Γ σε ορθογώνια. Τα λάθη που γίνονται στο προηγούμενο έργο, επαναλαμβάνονται και εδώ. Δηλαδή, για τον προσδιορισμό του εμβαδού των επιφανειών Β και Γ χρησιμοποιούνται, είτε ο τύπος του ορθογωνίου, είτε του τριγώνου, είτε του τραπεζίου, είτε τέλος, το εμβαδό ορίζεται σαν το γινόμενο όλων των πλευρών των δύο σχημάτων.

Στο τελευταίο έργο, που απαιτείται η σύγκριση του εμβαδού ενός ορθογωνίου και ενός τραπεζίου αρκετοί μαθητές χρησιμοποιούν λάθος τύπους για τον προσδιορισμό του εμβαδού του τραπεζίου. Για παράδειγμα, πέντε μαθητές χρησιμοποιούν τον τύπο του ορθογωνίου, τέσσερις τον τύπο το τριγώνου και κάποιοι, όπως και στα προηγούμενα έργα, το γινόμενο όλων των πλευρών. Είναι χαρακτηριστικό ότι από το σύνολο των 8 μαθητών που απαντούν σωστά στην πρώτη ερώτηση του 5ου έργου, μόνο οι δύο χρησιμοποιούν τον τύπο του τραπεζίου για την εύρεση του εμβαδού του σχήματος Β. Στις περισσότερες περιπτώσεις χωρίζουν το τραπέζιο σε ορθογώνιο και τρίγωνο, σε σχήματα δηλαδή περισσότερο οικεία σ' αυτούς.

Παρατηρήσαμε, ότι από το σύνολο των μαθητών της ομάδας ελέγχου, μόνο σε μία περίπτωση χρησιμοποιείται και μάλιστα επιτυχώς η μέθοδος της "επίθεσης", του τετραγωνισμού δηλαδή των επιφανειών σε τετράγωνα του 1 cm^2 , ενώ σε δύο αλλές περιπτώσεις χρησιμοποιείται με επιτυχία μία μικτή μέθοδος που περιλαμβάνει την χρήση τύπων και τον τετραγωνισμό των επιφανειών.

Τέλος, παρατηρούμε πως, οι δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην εύρεση των εμβαδών των σχημάτων που δίνονται, ή δημιουργούνται, ακολουθούν την ιεράρχηση που εμφανίζεται σε άλλες μελέτες αξιολόγησης των γνώσεων των μαθητών στην Γεωμετρία [Carpenter, κ.α., 1981].

Στην πειραματική ομάδα, του πρώτου πειράματος, συμμετέχουν 25 μαθητές. Από αυτούς οι 5 χρησιμοποιούν αριθμητικούς τύπους για την εύρεση των εμβαδών και μόνο οι 2 απ' αυτούς με επιτυχία. Η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιούν την τετραγωνική μονάδα 1 cm^2 που δίνεται στην αρχή του φύλλου και σημειώνουν πάνω στον αδιαβάθμητο χάρακα μήκος 1 cm, ή σχεδιάζουν την τετραγωνική μονάδα. Στην συνέχεια, επαναλαμβάνουν κατά μήκος των πλευρών των σχημάτων την μονάδα μήκους, ή αντιγράφουν ("επιθέτουν") την τετραγωνική μονάδα που έχουν σχεδιάσει στον χάρακά τους και στην συνέχεια τετραγωνίζουν τις επιφάνειες. Τέλος, δύο μαθητές, χρησιμοποιούν με επιτυχία μικτές μεθόδους (δηλαδή τύπους και τετραγωνισμό των επιφανειών). Τα αποτελέσμα από τις επιτυχίες των μαθητών της πειραματικής ομάδας παρουσιάζονται στο πίνακα 2.

	1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	22(88%)	15(60%)	18(72%)	18(72%)	14(56%)
αποτυχία	3(12%)	10(40%)	7(28%)	7(28%)	11(44%)

Πίνακας 2
Οι επιτυχίες των μαθητών της πειραματικής ομάδας στον υπολογισμό των εμβαδών.
(φύλλο εργασίας 1)

Ελέγχοντας τώρα την ορθότητα της πρώτης υπόθεσής μας σχετικά με την αποτελεσματικότητα του υλικού που ενσωματώνει πολιτισμικά και ιστορικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με την εξεταζόμενη έννοια, διαπιστώνουμε μια συστηματική συνάφεια.

Σε σχέση με το πρώτο έργο, η υπόθεσή μας είναι στατιστικά σημαντική ($X^2 = 3.76$) σε επίπεδο σημαντικότητας $p = 0.052$ [Παρασκεύοπουλος, 1984]. Στο δεύτερο έργο υπάρχει στατιστική σημαντικότητα ($X^2 = 3.26$), σε επίπεδο σημαντικότητος $p = 0.071$. Στο τρίτο και στο τέταρτο, η υπόθεσή μας είναι στατιστικά σημαντική ($X^2 = 7.225$) σε επίπεδο σημαντικότητας $p = 0.00718$. Τέλος, στο πέμπτο έργο έχουμε $X^2 = 4.099$ το επίπεδο της στατιστικής σημαντικότητας είναι $p = 0.0428$.

Οι συχνότητες από την αποτελεσματικότητα των δύο ομάδων στον προσδιορισμό των περιμέτρων, καταχωρούνται στους πίνακες 3 και 4.

	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	12 (39%)	16 (52%)	18 (58%)
αποτυχία	19 (61%)	15 (48%)	13 (42%)

Πίνακας 3

Οι επιτυχίες της ομάδας ελέγχου στην εύρεση της περιμέτρου.
(φύλλο εργασίας 1)

	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	6 (24%)	8 (32%)	4 (16%)
αποτυχία	19 (76%)	17 (68%)	21 (84%)

Πίνακας 4
Οι επιτυχίες της πειραματικής ομάδας στην εύρεση της περιμέτρου.
(φύλλο εργασίας 1)

Όπως παρατηρούμε από τα δεδομένα, οι μαθητές της ομάδας ελέγχου υπερέχουν έναντι της πειραματικής (39% επιτυχίες της ομάδας ελέγχου στο 1ο έργο, έναντι 24% της πειραματικής ομάδας, 52% και 32% τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο 4ο έργο, 58% και 16% αντίστοιχα στο 5ο έργο). Στην περίπτωση λοιπόν της περιμέτρου, τα εργαλεία της ομάδας ελέγχου φαίνονται αποτελεσματικότερα σε σχέση με αυτά της πειραματικής. Όμως η συνάφεια αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική στο 3ο και 4ο έργο, ενώ στο 5ο είναι ($X^2 = 8.578$) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $p = 0.0034$.

Γενικά παρατηρούμε ότι, αρκετοί μαθητές συγχέουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου, καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις, γεγονός που επισημαίνεται σε έρευνες αξιολόγησης των γνώσεων των μαθητών στα μαθηματικά [Kouba, κ.ά., 1988]. Έτσι χρησιμοποιείται το γινόμενο των πλευρών για την εύρεση της περιμέτρου, ή αντίστροφα, το άθροισμά τους για το εμβαδό. Αρκετοί πάλι (ένας στην ομάδα ελέγχου και έξη στην πειραματική) θεωρούν ότι η ισοδυναμία των εμβαδών των σχημάτων συνεπάγεται και ισότητα των περιμέτρων.

Το σημαντικό όμως από διδακτική σκοπιά, είναι το γεγονός πως, κανείς από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας δεν εγκαταλείπει την προσπάθεια και μερικές φορές δίνονται κάποιες ικανοποιητικές "προσεγγίσεις" , σε αντίθεση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου που παραιτούνται, όταν θεωρούν ότι αγνοούν τους σχετικούς τύπους.

Σχετικά τώρα με τον έλεγχο της δεύτερης υπόθεσης, σύμφωνα με την οποία, τα προτεινόμενα εργαλεία επηρεάζουν τις δραστηριότητες των μαθητών και τους "υποβάλλουν" τρόπους εργασίας, παρατηρούμε (πίνακας 5) πως, η υπόθεσή μας είναι και εδώ στατιστικά σημαντική ($X^2 = 26.22$) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας p = < 10 (- 6).

	πειραματική ομ.	ομάδα ελέγχου
χρήση τύπων	5	26

τετραγωνισμός	18	1

Πίνακας 5
Η επιρροή του εργαλείου στην μέθοδο.
(φύλλο εργασίας 1)

Ελέγχοντας την σχέση μεταξύ του φύλου και της επιτυχίας, τόσο στην πειραματική όσο και την ομάδα ελέγχου, δεν διαπιστώνουμε συστηματική συνάφεια, γεγονός που παρατηρείται και σε έρευνες που εξετάζουν τις σχέσεις του φύλου και του επιπέδου των ικανοτήτων των μαθητών στα μαθηματικά [Fennema, Sherman, 1978, Fennema, Carpenter, 1981]. Τέλος, κάποιες μικρές ποσοστιαίες διαφορές που παρατηρούνται στις εκτελέσεις των δύο φύλων δεν θεωρούνται άξιες σχολιασμού, αφού, λόγω του μικρού δείγματος, μικρές διαφοροποιήσεις στις απόλυτες συχνότητες επιφέρουν δυσανάλογα μεγάλες αλλαγές στις σχετικές εκφράσεις τους.

Φύλλο εργασίας 2.

Στο 2ο φύλλο εργασίας τα αποτελέσματα της ομάδας ελέγχου παρουσιάζονται στο πίνακα 6.

	1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	26(81%)	9(28%)	14(44%)	15(47%)	6(19%)
αποτυχία	6(19%)	23(72%)	18(56%)	17(53%)	26(81%)

Πίνακας 6
Οι επιτυχίες των μαθητών της ομάδας ελέγχου στον υπολογισμό των εμβαδών.
(φύλλο εργασίας 2)

Οι μικρές διαφοροποιήσεις που παρατηρούνται στις επιτυχίες των μαθητών της ομάδας ελέγχου στο φύλλο εργασίας 2 σε σύγκριση με το φύλλο εργασίας 1, με δεδομένη την ισοδυναμία στην δυσκολία των έργων, ίσως οφείλονται στην εξοικείωση των μαθητών με τα συγκεκριμένα έργα. Η διαφοροποίηση αυτή δεν θέτει σε κίνδυνο την "εσωτερική εγκυρότητα" του πειράματός μας, αφού το λάθος "ιστορίας" [Campbell, Stanley,1974] που εμφανίζεται, αντιμετωπίζεται με την αυτόνομη σύγκριση των δύο ομάδων σε κάθε πειραματική κατάσταση.

Τα αποτελέσματα της πειραματικής ομάδας παρουσιάζονται στον πίνακα 7.

	1ο έργο	2ο έργο	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	26(93%)	21(75%)	25(89%)	25(89%)	14(50%)
αποτυχία	2(7%)	7(25%)	3(11%)	3(11%)	14(50%)

Πίνακας 7
Οι επιτυχίες των μαθητών της πειραματικής ομάδας στον υπολογισμό των εμβαδών.
(φύλλο εργασίας 2)

Ο έλεγχος της πρώτης υπόθεσης γίνεται ξεχωριστά για κάθε έργο και μας δίνει:

Στο πρώτο, παρόλο που υπάρχει μια διαφοροποίηση στις επιτυχίες των δύο ομάδων (81% στην ομάδα ελέγχου και 93% στην πειραματική), στο μικρό σχετικά δείγμα της έρευνάς μας δεν εμφανίζεται στατιστικά σημαντική διαφορά. Στο δεύτερο, η διαφοροποίηση είναι στατιστικά σημαντική ($X^2 = 11.32$) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $p = 0.00076$. Στο τρίτο έργο, η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική ($X^2 = 11.68$) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $p = 0.00063$. Στο τέταρτο, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($X^2 = 10.25$) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $p = 0.00136$ και τέλος, στο πέμπτο εργο, στο ερώτημα που ζητείται ο προσδιορισμός του εμβαδού της επιφάνειας, υπάρχει ξανά στατιστική συνάφεια ($X^2 = 5.23$) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $p = 0.0022$.

Τα αποτελέσματα στον υπολογισμό της περιμέτρου των σχημάτων παρουσιάζονται στους πίνακες 8 και 9.

	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	14 (44%)	15 (47%)	2 (6%)
αποτυχία	18 (56%)	19 (53%)	30 (94%)

Πίνακας 8
Οι επιτυχίες της ομάδας ελέγχου στην εύρεση της περιμέτρου.
(φύλλο εργασίας 2)

	3ο έργο	4ο έργο	5ο έργο
επιτυχία	13 (46%)	10 (36%)	5 (18%)
αποτυχία	15 (54%)	18 (64%)	23 (82%)

Πίνακας 9
Οι επιτυχίες της πειραματικής ομάδας στην εύρεση της περιμέτρου.
(φύλλο εργασίας 2)

Σαυτό το φύλλο εργασίας, υπάρχει μια διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων συγκριτικά με το φύλλο εργασίας 1. Για παράδειγμα, στο πρώτο έργο έχουμε μια μικρή υπεροχή της πειραματικής ομάδας 46%, έναντι 44% της ομάδας ελέγχου. Παρόμοια, στο 5ο έργο, έχουμε 18% και 6% αντίστοιχα. Στο 4ο έργο, διατηρείται η υπεροχή της ομάδας ελέγχου (47% έναντι 36% της πειραματικής), όμως, το μέγεθος της διαφοροποίησης σε σχέση με το φύλλο εργασίας 1, είναι μειωμένο. Εδώ, οι διαφοροποιήσεις στα αποτελέσματα των ομάδων δεν παρουσιάζουν στατιστική σημαντικότητα, ενώ τα θετικότερα αποτελέσματα της πειραματικής ομάδας στα έργα 3 και 4, έναντι της αντίστοιχης του φύλλου 1, μπορεί να αποδοθούν στην επίδραση της διδακτικής παρέμβασης που υποβάλαμε την ομάδα αυτή αμέσως μετά την εκτέλεση του πρώτου πειράματος.

Η σύγχιση μεταξύ του εμβαδού και της περιμέτρου, που εντοπίσαμε στο φύλλο εργασίας 1, παρατηρήθηκαν και εδώ, αλλά σε μικρότερο, ιδιαίτερα στην πειραματική ομάδα, αριθμό μαθητών. Επίσης, διαπιστώνουμε (άν εξαιρέσουμε πέντε μαθητές της ομάδας ελέγχου που χρησιμοποιούν μικτές μεθόδους, μιας μαθήτριας που κάνει μια απόπειρα χωρισμού των επιφανειών χωρίς όμως να χρησιμοποιεί κάποια σταθερή μονάδα επιφάνειας και ενός μαθητή της πειραματικής ομάδας που χρησιμοποιεί μικτές μεθόδους), ότι υπάρχει συστηματική συνάφεια μεταξύ των εργαλείων που δίνονται στους μαθητές και των στρατηγικών επίλυσης που υιοθετούνται (πίνακας 10). Έτσι λοιπόν, η δεύτερη υπόθεσή μας είναι στατιστικά σημαντική ($X^2 = 44.37$) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας p = < 10 (- 6).

	πειραματική ομ.	ομάδα ελέγχου
χρήση τύπων	1	26
τετραγωνισμός	25	0

Πίνακας 10
Η επιρροή του εργαλείου στην μέθοδο.
(φύλλο εργασίας 2)

Οι διαφοροποιήσεις της πειραματικής ομάδας στα δύο πειράματα, μας δίνουν την δυνατότητα να ερευνήσουμε την τρίτη υπόθεσή μας, δηλαδή, την επίδραση της διδασκαλίας στην οποία υποβάλλεται η πειραματική ομάδα. Παρατηρούμε μια βελτίωση στην σωστή εκτέλεση του πρώτου έργου στο 2ο φύλλο εργασίας (93% οι επιτυχίες στο φύλλο 2, έναντι 88% του φύλλου 1). Στο δεύτερο έργο, η διαφοροποίηση στα δύο πειράματα είναι μεγαλύτερη (75% στις επιτυχίες στο δεύτερο, έναντι 60% του πρώτου). Στο τρίτο και στο τέταρτο έργο έχουμε ίδια αποτελέσματα και οι επιτυχίες είναι 89% στο δεύτερο πείραμα, έναντι 72% του πρώτου. Οι διαφοροποιήσεις όμως και στα τέσσερα έργα, όπως εμφανίζονται στο δείγμα μας, δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

Ο έλεγχος της επίδρασης του φύλου στην σωστή εκτέλεση των έργων των δύο ομάδων, όπως και στο πρώτο πείραμα, δεν εμφανίζει διαφοροποιήσεις που να υπονοούν κάποιας μορφής συνάφεια.

Τέλος, οι επιφυλάξεις στην ερμηνεία, καθώς και οι περιορισμοί στην διατύπωση συμπερασμάτων που εκφράστηκαν στο φύλλο εργασίας 1, ισχύουν και εδώ.

4. Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε τα αποτελέσματα που θα επιφέρει η εισαγωγή κάποιων μεταβλητών στην αντιμετώπιση θεμάτων της Γεωμετρίας με εμβαδά και περιμέτρους.

Η πρώτη υπόθεση, για τον θετικό ρόλο των "εργαλείων" που ενσωματώνουν πολιτισμικά και ιστορικά χαρακτηριστικά στην αντιμετώπιση προβλημάτων με εμβαδά και περιμέτρους, επιβεβαιώθηκε, αφού διαπιστώθηκε η σημαντική συμβολή της ανωτέρω μεταβλητής. Ιδιαίτερα επισημάναμε ότι, όταν η μονάδα μέτρησης έχει την ίδια διάσταση με το μετρούμενο μέγεθος, έχουμε θετικότερα αποτελέσματα. Η διαπίστωση αυτή επαληθεύτηκε τόσο για τις επιφάνειες, όσο και για τις περιμέτρους. Στην περίπτωση της πειραματικής ομάδας, επιμείναμε στο ποιοτικό προσδιορισμό της έννοιας του εμβαδού και όχι σε ποσοτικά-μετρικά χαρακτηριστικά. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές αυτούς παραπέμπει τόσο στην Ευκλείδεια μέθοδο της *επίθεσης* "μονάδων"επιφανειών πάνω στην μετρούμενη επιφάνεια, όσο και στην γενική μέθοδο του Αρχιμήδη για την εύρεση εμβαδών που συνίσταται στον χωρισμό της μετρούμενης επιφάνειας στα "αθροίσματα Riemann".

Η δεύτερη υπόθεση, διερευνά την συνάφεια των "εργαλείων" που χρησιμοποιούνται και της στρατηγικής που επιλέγεται για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Διαπιστώσαμε, ότι τα προτεινόμενα κάθε φορά εργαλεία, "υποβάλλουν" τρόπους εργασίας και "οργανώνουν" την δραστηριότητα των μαθητών.

Η τρίτη υπόθεση αφορά στο θετικό ρόλο της διδασκαλίας, όταν αυτή εντάσσεται σε μια ιστορική προοπτική κατά την παρουσίαση μιας έννοιας. Εδώ η υπόθεσή μας δεν εμφανίζει στατιστική σημαντικότητα, διαπιστώθηκε όμως, ότι αυτή η διδακτική προσέγγιση, συμβάλλει θετικά στην αντιμετώπιση των προβλημάτων που εξετάστηκαν.

Τέλος, δεν προκύπτει συνάφεια μεταξύ του φύλου των μαθητών και επιτυχούς εκτέλεσης, αφού από τα δεδομένα δεν προκύπτουν, ούτε ποσοτικές, αλλά ούτε και ποιοτικές διαφοροποιήσεις.

Στη σύντομη σύνοψη των αποτελεσμάτων που μόλις επιχειρήσαμε, δεν διαφεύγουν της προσοχή μας οι περιορισμοί που μας θέτει το μικρό αριθμητικά δείγμα της έρευνας. Επιπλέον, η θετική συμβολή του "εργαλείου" που χρησιμοποίησε η πειραματική ομάδα στην αντιμετώπιση των συγκεκριμένων έργων, δεν μας επιτρέπει ούτε να γενικεύσουμε την αποτελεσματικότητα της δράσης του, αλλά, ούτε και να αμφισβητήσουμε την σπουδαιότητα των παραδοσιακών "τεχνικών" εργαλείων μέτρησης με τα οποία εφοδιάζονται οι μαθητές κατά την διδασκαλία των μαθηματικών.

Παράλληλα, το μεγάλο ποσοστό αποτυχίας των μαθητών να ανταποκριθούν σε έργα με εμβαδά και περιμέτρους, που παρόμοιά τους έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες βαθμίδες της εκπαίδευσης, ή, η σύγχισή τους στις έννοιες του εμβαδού και περιμέτρου, θέτουν ξανά το πρόβλημα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ίσως το πρόβλημα να τίθεται με περισσότερο οξυμένη μορφή στον τύπο του σχολείου (Τ.Ε.Λ.) από το οποίο αντλήσαμε το δείγμα μας. Είναι χαρακτηριστικό πως, οι μαθητές που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμά μας αποφοίτησαν από το Γυμνάσιο με μέσο όρο βαθμολογίας στα μαθηματικά 11.5 περίπου. Τα κοινωνικο-οικονομικά επίσης, χαρακτηριστικά των συνοικιών από τις οποίες προέρχονται οι μαθητές του συγκεκριμένου σχολείου, συνεπάγονται ορισμένες στάσεις απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών [Χασάπης, 1994].

Έτσι, αναδύεται η αναγκαιότητα της οργάνωσης παράλληλων εμπειρικών ερευνών, με ευρύτερο δείγμα ,που να επεκτείνεται και σε άλλους τύπους σχολείων.

Αν θέλαμε συμπερασματικά να αξιολογήσουμε την σημασία της έρευνας αυτής θα λέγαμε ότι, εντάσσεται σε μια προσπάθεια της διδακτικής των μαθηματικών να κάνει περισσότερο προσιτό και οικείο στους μαθητές το αντικείμενο των μαθηματικών, μέσα από μια άλλη παιδαγωγική ιδεολογία που προβάλει κύρια την μαθηματική δραστηριότητα κατά την διαδικασία γένεσης των μαθηματικών και όχι τα έτοιμα αποτελέσματά της. Γιαυτό κρίναμε χρήσιμη την προσφυγή στην ιστορική διαμόρφωση της εξεταζόμενης έννοιας και την κατανόησή της μέσα από συγκεκριμένες καταστάσεις. Ο μαθητής πρέπει να παρακολουθεί την ιστορική πορεία γένεσης των μαθηματικών μέσα από την δική του δραστηριότητα που πρέπει να βασίζεται στην ενόραση, τον πειραματισμό, την διατύπωση υποθέσεων, την δοκιμή και το λάθος και τέλος, την προσπάθεια γενίκευσης με την χρήση της επαγωγικής μεθόδου. Το επίπεδο της αυστηρότητας στην απόδειξη πρέπει κάθε φορά να ανταποκρίνεται στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών ώστε να μην αποθαρρύνονται από την προσπάθεια τους. Γιατί τελικά, στόχος μας δεν πρέπει να είναι η αυστηρότητα στα μαθηματικά, αλλά, πως θα γίνει περισσότερο κατανοητό από τους μαθητές το μαθηματικό αντικείμενο.

Ελληνική Βιβλιογραφία

Arsac G. "Η καταγωγή της απόδειξης", *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 7 (1991), σ.σ. 61-73.

Αρχιμήδους Άπαντα/μετάφραση, σχόλια Ε. Σταμάτη.-Αθήνα: , Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδος, Τόμος Β', 1973.- 586 σ.

Bigge L. Morris. Θεωρίες μάθησης για εκπαιδευτικούς/μετ. Ν. Ράπτης.-Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη, 1986.-534 σ.

Bkouche R. "Προβληματισμοί για την ιστορία της Γεωμετρίας". *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 10-11 (1992) σ.σ. 67-130.

Βοσνιάδου Σ. (επ.). Η ψυχολογία των μαθηματικών.-Αθήνα: Gutenberg, 1995.- 270 σ.

Bunt L., Jones P., Bedient J. Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών/μετ.Α.Φερεντίνου-Νικολακοπούλου.Αθήνα:Γ.Α.Πνευματικός,1981.- 336 σ.

Βυγκότσκι Λεβ. Σκέψη και γλώσσα/μετ. Αντελίνα Ρόδη.- Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση, 1988.- 439 σ.

Campbell D., Stanley J. Σχέδια πειραματικής ερεύνης/μετ. Ι. Τσιμπούκης.- Αθήνα: 1974.- 175 σ.

Doise W., Mugny G. Η κοινωνική ανάπτυξη της νοημοσύνης/μετ. Ν. Ράπτης - Κ Κουρεμένος.- Αθήνα: Πατάκης, 1987.- 257 σ.

Ζαχάρος Κ. "Η συμβολή της κοινωνικής σημασιοδότησης στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού από παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας". *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 81 (1995), σ.σ. 79-84.

Laborde C. "Σύγχρονες τάσεις στη διδακτική των Μαθηματικών και της πληροφορικής". *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 25 (1985), σ.σ. 47-51.

Παπακωνσταντίνου Π. Εισαγωγή στην μεθοδολογία έρευνας των επιστημών της αγωγής.- Πάτρα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1990.- 139 σ. Πάτρα.

Παπαμιχαήλ Γ. Μάθηση και κοινωνία.- Αθήνα: Εκδόσεις Οδυσσέας, 1988.- 217 σ.

Παρασκευόπουλος Ι. Στοιχεία περιγραφικής και επαγωγικής στατιστικής.- Αθήνα: 1984.- 190 σ.

Piaget J. α). Προβλήματα γενετικής ψυχολογίας.-Αθήνα: Εκδόσεις Υποδομή, 1979.- 170 σ.

β). Προβλήματα Ψυχολογίας.- Αθήνα: Εκδόσεις Νέα Σύνορα, 1979.- 96 σ.

Sierpihska A. "Μερικές ιδέες πάνω στη μεθοδολογία της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών που συνδέεται με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου". *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχ.7 (1991), σ.σ.11-28.

Ραβάνης Κ. Φυσικές έννοιες για την προσχολική ηλικία.- Πάτρα: Εκδόσεις του Πανεπιστημίου Πατρών, 1992-1993.- 107 σ.

Χασάπης Δ. "Στάσεις των αποφοίτων του Δημοτικού Σχολείου απέναντι στα Μαθηματικά : Δεδομένα και διαπιστώσεις μιας εμπειρικής έρευνας". *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 79 (1994), σ.σ. 32-38.

Ξένη Βιβλιογραφία

Battista Micheal."Understanding area and area formoulas". *Mathematics Teacher*, Vol..75, N.5 (1982), p.p. 362-368.

Battista M., Clements D. "Geometry and Proof". *Mathematics Teache*r, v. 88, n.1 (1995), p.p. 48-54.

Carpenter T., Corbitt M., Kepner H ., Lindquist M., Reys R. Results from the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress.- s.l.: National Council of Teachers of Mathematics, 1981.- 167 p.

Fennema E., Carpenter P. T. "Sex-related Differences in Mathematics". In Corbitt M. (ed.),Results from the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress.- s.l.: National Council of Teachers Of Mathematics, 1981, p.p. 158-163.

Fennema E., Sherman J. "Sex-related differences in Mathematics Achievement and related factors: a further study". *Journal for Research in Mathematics Education,* May 1978, p.p. 189-203.

Hoffer Alan. "Geometry is more than proof". *Mathematics Teacher*, Vol. 74, No. 1 (1981), p.p. 11-14.

Kouba L.V., Brown A. C., Carpenter P.T., Lindquist M. M., Silver A. E., Swafford O. J., 1988. "Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Measurement, Geometry, Data Interpretation, Attitudes, and Other Topics". *Arithmetic Teacher*, vol. 35, no. 9 (1988), p.p. 10-16.

Laborde C. "Audacity and Reason: French Research in Mathematics Education". *For the Learning of Mathematics* 9,3 (1989), p.p. 31-36.

Leon A. Manuel de psychopedagogie experimentale.- Paris: PUF, 1977.

Nunes Terezinha. "Cognitive Invariants and Cultural Variation in Mathematical Concepts". I*nternational Journal of Behavioral Development*, 15, 4(1992), p.p. 433-453.

Nunes T., Light P., Mason J. "Tools for thought: the measurement of length and area". *Learning and Instruction,* vol. 3 (1993), p.p. 39-54.

Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. The child's conception of geometry.- London: Routledge and Kegan Paul, 1960.- 411 p.

Vergnaud G., 1983. "Multiplicative Structures. Acquisition of Mathematics concepts and processes". In, Richard Lesh & Marsha Landau (ed.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.- New York: Academic Press, 1983.

Περίληψη

Σκοπός της έρευνάς μας είναι να διερευνήσει την ισχύ των εξής υποθέσεων: Πρώτον, αν η πολιτισμική και ιστορική διάσταση που ενσωματώνεται στα προτεινόμενα "εργαλεία" για την αντιμετώπιση προβλημάτων με εμβαδά και τα οποία σχετίζονται άμεσα με τα προτεινόμενα έργα, συμβάλλει αποτελεσματικότερα στην αντιμετώπισή τους. Δεύτερον, κατά πόσο τα εργαλεία αυτά "υποβάλουν" στους μαθητές τρόπους επίλυσης. Τέλος, τη συμβολή της διδασκαλίας, ιδιαίτερα, όταν αυτή εμπεριέχει στοιχεία που σχετίζονται με την ιστορική εξέλιξη της εξεταζόμενης έννοιας.

Το δείγμα μας αποτελείται από 62 μαθητές της Α' Λυκείου και το πειραματικό μας σχέδιο συγκρίνει της επιδόσεις δύο ομάδων, της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου.

Οι μεταβλητές, την επίδραση των οποίων εξετάζουμε, εισάγονται μόνο στην πειραματική ομάδα και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μας δείχνει την θετική επίδρασή τους.

Φύλα εργασίας

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (1)

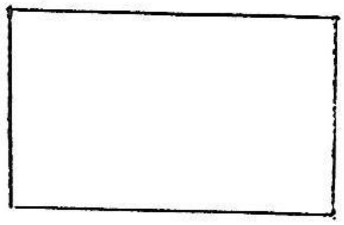
Πειραματική ομάδα

1ο Τ.Ε.Λ. Δραπετσώνας
Ημερομηνία:

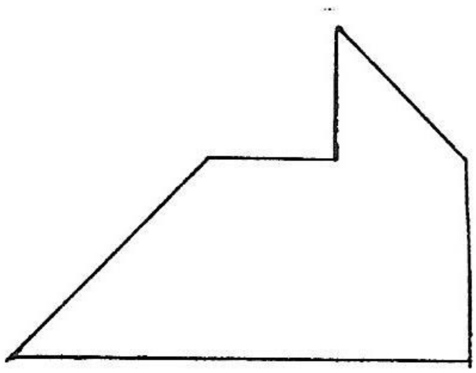
Ονοματεπώνυμο:
Τάξη Α, Τμήμα

Για τα ερωτήματα 1, 2, 3, 4 και 5 δίνεται σαν μονάδα εμβαδού το 1cm^2 

1. Να βρεθεί το εμβαδό του ορθογωνίου:



2. Να βρεθεί το εμβαδό του σχήματος:



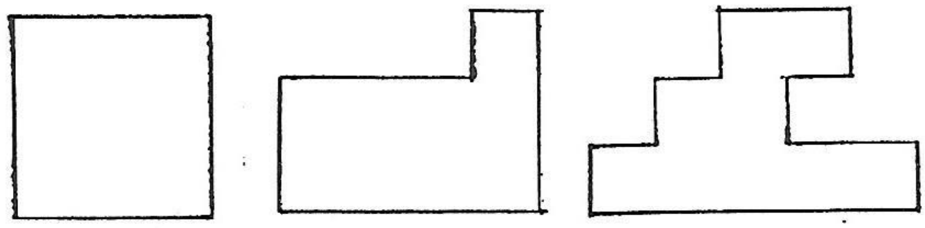
3.

A B

α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων A και B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των δύο σχημάτων.

4.



Α Β Γ

α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων Α, Β και Γ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των τριών σχημάτων.

5.

Α Β

α). Να συγκριθούν τα εμβαδά των σχημάτων Α και Β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε την περίμετρό τους.

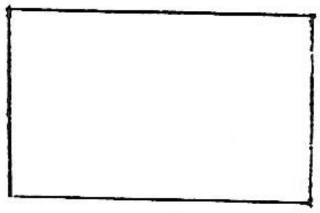
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (1)

Ομάδα ελέγχου

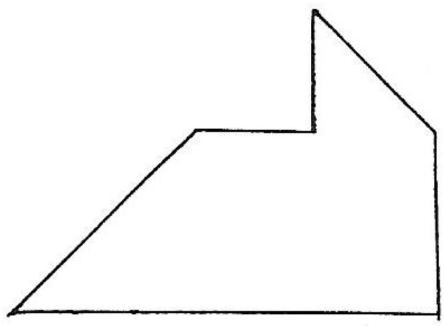
1ο Τ.Ε.Λ. Δραπετσώνας
Ημερομηνία:

Ονοματεπώνυμο:
Τάξη Α, Τμήμα

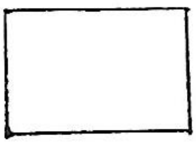
1. Να βρεθεί το εμβαδό του ορθογωνίου:

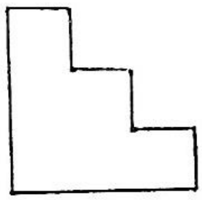


2. Να βρεθεί το εμβαδό του σχήματος:



3.



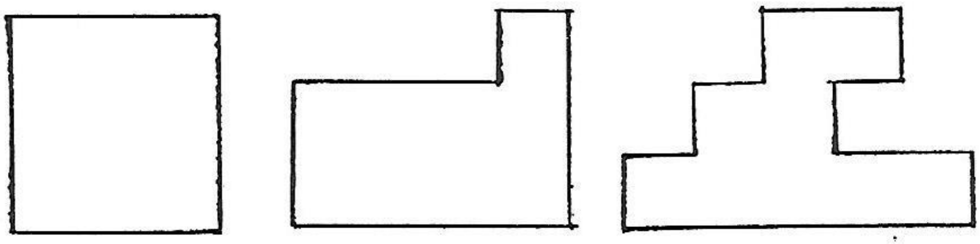


A B

α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων Α και Β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των δύο σχημάτων.

4.



A B Γ

α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων A, B και Γ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των τριών σχημάτων.

5.

A B

α). Να συγκριθούν τα εμβαδά των σχημάτων A και B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε την περίμετρό τους.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2)

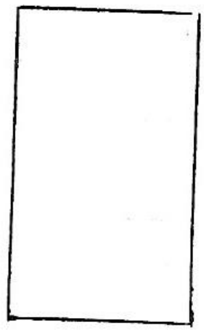
Πειραματική ομάδα

1ο Τ.Ε.Λ. Δραπετσώνας
Ημερομηνία:

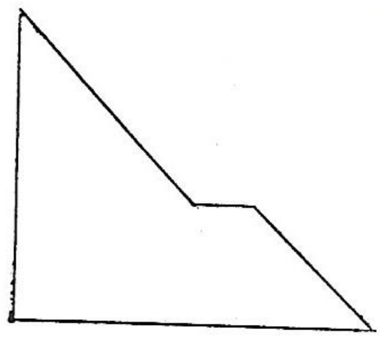
Ονοματεπώνυμο:
Τάξη Α, Τμήμα

Για τα ερωτήματα 1, 2, 3, και 4 δίνεται σαν μονάδα εμβαδού το 1cm² 

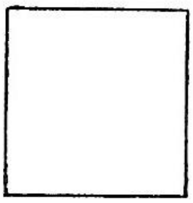
1. Να βρεθεί το εμβαδό του ορθογωνίου:



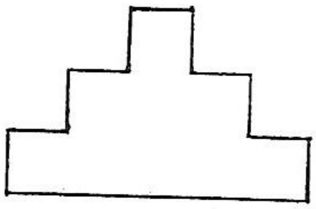
2. Να βρεθεί το εμβαδό του σχήματος:



3.



A

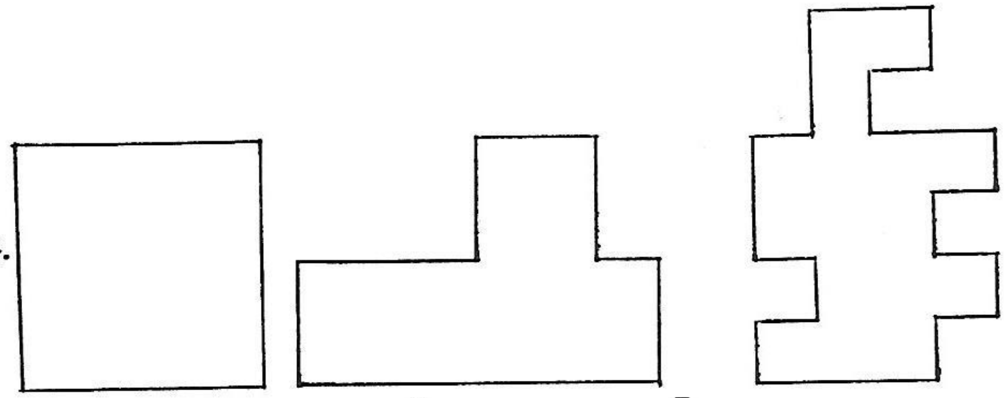


B

α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων A και B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των δύο σχημάτων.

4.

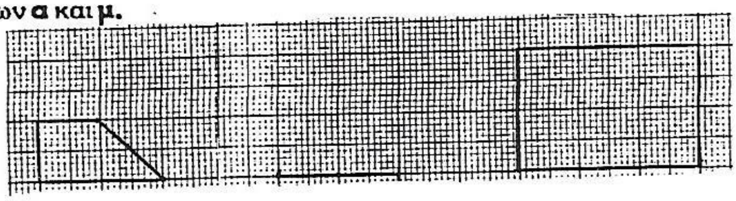


Α Β Γ

α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων Α, Β και Γ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των τριών σχημάτων.

5. Αν **α** είναι η μονάδα εμβαδού και **μ** η μονάδα μήκους, να βρεθούν το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό του ορθογωνίου που απεικονίζεται κατωτέρω. Το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό να εκφραστούν συναρτήσει των **α** και **μ**.



α μονάδα εμβαδού — **μ** μονάδα μήκους

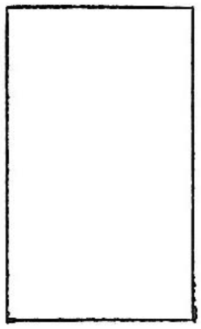
Μήκος = Πλάτος = Εμβαδό =

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2)

Ομάδα ελέγχου

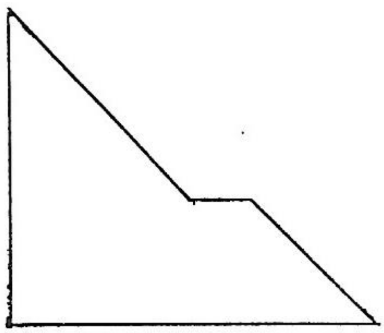
1ο Τ.Ε.Λ. Δραπετσώνας
Ημερομηνία:

Ονοματεπώνυμο:
Τάξη Α, Τμήμα

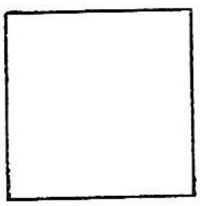


1. Να βρεθεί το εμβαδό του ορθογωνίου:

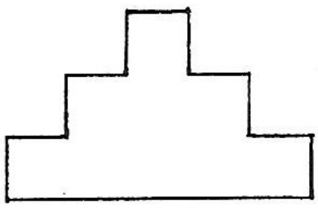
2. Να βρεθεί το εμβαδό του σχήματος:



3.



A

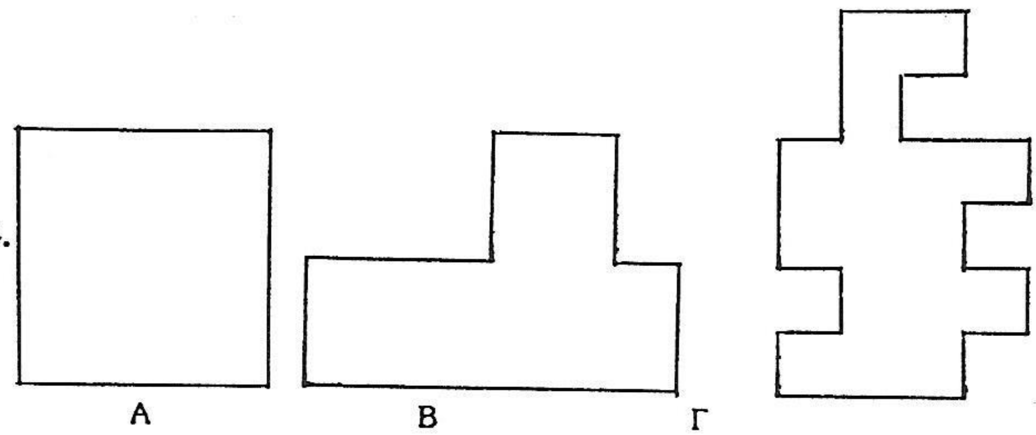


B

α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων Α και Β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των δύο σχημάτων.

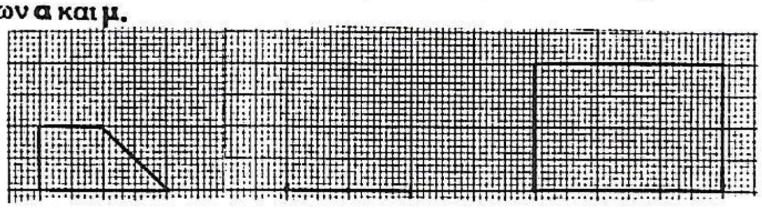
4.



α). Να συγκρίνετε τα εμβαδά των σχημάτων A, B και Γ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β). Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των τριών σχημάτων.

5. Αν **α** είναι η μονάδα εμβαδού και **μ** η μονάδα μήκους, να βρεθούν το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό του ορθογωνίου που απεικονίζεται κατωτέρω. Το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό να εκφραστούν συναρτήσει των **α** και **μ**.



α **μ**

μονάδα εμβαδού μονάδα μήκους

Μήκος = Πλάτος = Εμβαδό =

ABSTRACT

The aim of this research is to investigate the truth of following supositions.

Our firt aim is to see if the cultural and historical dimention which is enclosed in the suggested «tools» used for facing problems that have to do with the area and contributes in amore effective way to facing them.

Secondly, in what way to facing them.

Finaly the contribution of teching, especially when this inclydes elements which have to do with the historical evolution of the concept under investigation.

Our sample consists of 62 students in the first year of Senior high School and our experimental plan compares the output of two different groups, the experimantal group and the control group.

The variables whose influence we are investigation, have only been introduced in the experimental group and the evaluation of their results whows their positive influence.