Ο.Μ.Ε.Ρ.

Επιστημονική Περιοδική Έκδοση της Ο.Μ.Ε.Ρ

Παγκόσμια Οργάνωση Προσχολικής Αγωγής
Ελληνική Επιτροπή

ερευνώντας τον κόσμο ΤΟΥ ΠΑΙΔΙΟΥ

2011 – Τεύχος 10

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Ζ.
ΖΑΧΑΡΟΣ Κ.
ΜΑΝΕΣΗ Σ.
ΜΑΤΘΑΙΟΥ Σ.
ΜΟΤΣΙΟΥ Ε.
ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Κ.
ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ Μ.
ΣΤΕΛΛΑΚΗΣ Ν.

ISSN 1106 - 5036

Ζαχάρος Κώστας
Επίκουρος Καθηγητής, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η., Πανεπιστήμιο Πατρών, zacharos@upatras.gr
Παπαδημητρίου Κωνσταντίνα
Νηπιαγωγός, απόφοιτη Μεταπτυχιακού Τμήματος Σπουδών, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η., Πανεπιστήμιο Πατρών

Η συνεισφορά του εκπαιδευτικού υλικού στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης στο νηπιαγωγείο

Περίληψη

Σκοπός της έρευνας που παρουσιάζεται εδώ ήταν να διερευνήσει τις δυνατότητες μαθητών προσχολικής εκπαίδευσης να επιλύουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, καθώς και τη συνεισφορά των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην επίλυσή τους.

Το δείγμα της έρευνας ήταν 12 νήπια ενός δημόσιου νηπιαγωγείου.

Στη διαδικασία συλλογής των εμπειρικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν δυάδες μαθητών που με τη χρήση ζυγαριάς (παλάντζας) και την ισορρόπησή της, δημιουργούν σενάρια που απαιτούν προσθέσεις και αφαιρέσεις μικρών ποσοτήτων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η διδασκαλία συνεισφέρει στην επιτυχή αντιμετώπιση των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης που προτάθηκαν και επιπλέον, η χρήση των αναπαραστάσεων είναι ενισχυτική αυτής της προσπάθειας.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματικές έννοιες, επίλυση προβλήματος, εποπτικό υλικό, εξωτερικές αναπαραστάσεις.

The contribution of physical representations in solving arithmetic problems in preschool education

Abstract

The aim of this study was to investigate two aspects: firstly to investigate children's ability in solving addition problems. The second aim was to investigate the contribution of teaching interventions and specifically the contribution of physical representations manipulatives to develop children's efforts to solve problems.

The sample consisted of 12 children of a Greece public preschool classroom. The findings show that children responded positively to the problem solving. Graphically representing the solutions on paper sheet supported the children's efforts. In addition, the forms of interaction played an important role for the positive outcome of the activities.

Keywords: mathematical concepts, problem solving, addition, early childhood education, external representations.

Η εισαγωγή στις μαθηματικές έννοιες είναι συνυφασμένη με τη χρήση εκπαιδευτικού υλικού

Η συνεισφορά του εκπαιδευτικού υλικού και συγκεκριμένα η χρήση φυσικών αντικειμένων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών στην προσχολική εκπαίδευση είναι σημαντική (εδώ ως "φυσικά" αντικείμενα θεωρούνται τα αντικείμενα που χειρίζεται το παιδί με το χέρι). Η ιδέα της χρήσης εποπτικού υλικού για τη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών δεν είναι πρόσφατη στη μαθηματική εκπαίδευση. Τη χρήση του εποπτικού υλικού για την υποστήριξη της μάθησης θα τη συναντήσουμε σε παιδαγωγούς όπως ο Fröbel και η Montessori. Ο Fröbel εισάγει την έννοια του «νηπιακού κήπου», όπου επαγγελματίες νηπιαγωγοί ασχολούνται με την οργάνωση του παιγνιδιού των παιδιών, προτείνοντας κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό που ο Fröbel ονομάζει «δώρα» (Heiland 2000). Τα βασικά αντικείμενα που εισάγονται στην νηπιακό κήπο είναι, η μπάλα, η σφαίρα, ο κύβος, το ξυλάκι και το πλακίδιο. Με αυτά τα απλά αντικείμενα το παιδί εξοικειώνεται με τα γεωμετρικά σχήματα, τις γεωμετρικές κατασκευές, τις ταξινομήσεις, κ.ά. Η ενασχόληση του παιδιού με το συγκεκριμένο εκπαιδευτικό υλικό που προτείνεται από τον Fröbel αποτελεί το αναγκαίο υπόβαθρο για την μετέπειτα γνωστική του εξέλιξη.

Στα «διδακτικά στηρίγματα» της Montessori περιλαμβάνεται ένα πλούσιο εκπαιδευτικό υλικό που προορίζεται για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών (Böhm 2000, Gettman, 2003). Το παιδί έχει ελεύθερη πρόσβαση στο διδακτικό υλικό και επιλέγει αυτό που ανταποκρίνεται στα ενδιαφέροντά του, στο γνωστικό του επίπεδο και τον προσωπικό ρυθμό μάθησης. Ο εκπαιδευτικός ρόλος του προτεινόμενου υλικού βρίσκεται στο γεγονός ότι το παιδί όταν το χρησιμοποιεί μπορεί να κάνει συγκρίσεις και να εντοπίζει ομοιότητες ή διαφορές. Το υλικό διαμεσολαβεί για το πέρασμα από το συγκεκριμένο στην αφηρημένη σκέψη. Η Montessori πρότεινε η μάθηση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών να γίνεται μέσω του παιγνιδιού και της ενασχόλησης με το εκπαιδευτικό υλικό. Δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην άμεση χρήση φυσικών αντικειμένων, που ισχυρίζεται ότι παίζουν σημαντικό ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη του παιδιού και στην ανάπτυξη της μαθηματικής αφηρημένης σκέψης.

Επίσης στο έργο του Piaget, παρά το γεγονός ότι η εργασία του δεν είναι εστιασμένη στην εκπαίδευση, αλλά στην ανάπτυξη μιας θεωρίας για το πώς το παιδί κατανοεί τον κόσμο, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη αξία της χρήσης συγκεκριμένων αντικειμένων για την υποστήριξη της μάθησης. Παιδαγωγοί που το έργο τους βασίζεται στις θεωρίες του Piaget, όπως για παράδειγμα οι C. Kamii και R. Devries (1980) αναπτύσσουν ένα πρόγραμμα διδασκαλίας των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, βασισμένο στο παιγνίδι με τη χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού με διακριτά αντικείμενα.

Η εισαγωγική χρήση εκπαιδευτικού υλικού με διακριτά αντικείμενα τονίζεται και από τον J. Bruner (1966). Ο Bruner θεωρεί τη χρήση του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού υλικού ως ένα αναγκαίο πρώτο βήμα για το πέρασμα στη συγκρότηση της αφηρημένης σκέψης. Ισχυρίζεται ότι μια τέτοια εισαγωγική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών ενισχύει τις μορφές αναπαράστασης που αναπτύσσει το παιδί και η απόκτησή τους θεωρείται σύμφυτη με την επιστήμη των μαθηματικών. Ο Ζ. Dienes, συνεργάτης του Bruner, σχεδίασε εκπαιδευτικό υλικό και παιγνίδια για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην πρώτη σχολική ηλικία (1964α και 1964β). Οι μαθητές με την βοήθεια του συγκεκριμένου υλικού, που εισάγει σε διαδοχικά μαθησιακά στάδια, διευκολύνονται στην ανακάλυψη της δομής των μαθηματικών εννοιών.

Γιατί το εκπαιδευτικό υλικό συνεισφέρει στη μάθηση

Θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να αιτιολογήσουμε γιατί το φυσικό υλικό που χρησιμοποιείται στην εκπαίδευση, μπορεί πράγματι να είναι υποστηριχτικό της μάθησης. Ένας πρώτος λόγος είναι ότι η χρήση του συγκεκριμένου υλικού μπορεί, μέσα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, να υποστηρίξει τις λειτουργίες της μνήμης και να διευκολύνει στην ανάκληση δεδομένων. Δίνει τη δυνατότητα στους μικρούς μαθητές, να επικυρώνουν την αλήθεια των εικασιών και των ισχυρισμών τους, να κάνουν προβλέψεις για άγνωστες σε αυτούς καταστάσεις, μεσολαβώντας τελικά στο μετασχηματισμό της γνώσης από το συγκεκριμένο στο γενικό και αφηρημένο (Uttal et al. 1997, Martin et al. 2007, Mix 2010).

Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι η θετική συνεισφορά των φυσικών αντικειμένων στη διδασκαλία συναρτάται με το πλαίσιο και την αντίστοιχη δραστηριότητα που υποστηρίζουν τη χρήση του. Γιατί, δεν είναι το υλικό από μόνο του που συνεισφέρει στη μάθηση, αλλά η συγκεκριμένη χρήση του στο πλαίσιο συγκεκριμένων δραστηριοτήτων που κάνουν πιθανή τη υποστήριξη της μάθησης.

Τα παιδιά αντιλαμβάνονται, ήδη από τα πρώτα σχολικά τους βήματα, ότι τα αντικείμενα που τους παρουσιάζονται στη σχολική αίθουσα ως εκπαιδευτικό υλικό, όπως οι κύβοι, κομμάτια παζλ κ.λπ., στο πλαίσιο της διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών ενσωματώνουν μαθηματικές ιδέες και δομές. Γιατί, δεν είναι το υλικό από μόνο του που συνεισφέρει στη μάθηση, αλλά η συγκεκριμένη χρήση του στο πλαίσιο συγκεκριμένων δραστηριοτήτων που κάνουν πιθανή την υποστήριξη της μάθησης (Zacharos et al., 2011).

Είναι το συγκεκριμένο πλαίσιο της σχολικής τάξης με τις δραστηριότητες και τα παραδείγματα, που προσδίδουν στο εκπαιδευτικό υλικό συγκεκριμένη χρήση και οι μαθητές μαθαίνουν να τα συσχετίζουν με σημεία και σύμβολα των μαθηματικών (Steinbring 2005, 2006). Για παράδειγμα, όταν σε μια ποσότητα τριών βόλων βάλω και άλλους δύο, στο πλαίσιο δραστηριοτήτων που σχετίζονται με τις αριθμητικές πράξεις, οι ενέργειες αυτές ερμηνεύονται ως πρόσθεση. Τέτοια παραδείγματα που είναι συχνά στην σχολική αίθουσα και λειτουργούν ως πρότυπα, προσφέρουν ενδείξεις για την αναγνώριση και την ερμηνεία των αριθμητικών πράξεων και οι μαθητές εκπαιδεύονται να τα ερμηνεύουν με τρόπους που προσιδιάζουν στη μαθηματική εκπαίδευση. Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα των βόλων, το «βάζω και άλλα», «ενώνω» κ.λπ., ερμηνεύονται ως πρόσθεση, ενώ αντίστοιχα το «βγάζω» και η απομάκρυνση, ως αφαίρεση (Ζαχάρος 2007, Ζαχάρος κ.ά. 2008).

Συνεπώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, δεν είναι από μόνη της η παρουσίαση φυσικών αντικειμένων που οδηγεί στη μάθηση, αλλά κύρια το πλαίσιο ανάπτυξης των δραστηριοτήτων που οδηγεί σε συγκεκριμένες ερμηνείες και μορφές συμβολικής αναπαράστασης, που έχουν σαν αποτέλεσμα τη συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης.

Με τις προηγούμενες επισημάνσεις θέλουμε να ενισχύσουμε την άποψη ότι τα μαθηματικά, όπως και κάθε θεωρητική γνώση, χρειάζονται ένα ειδικό πλαίσιο για να αναπτυχθούν σε ένα οργανωμένο σώμα γνώσης.

Η συνεισφορά των εξωτερικών αναπαραστάσεων

Παράλληλα με τη χρήση των φυσικών αντικειμένων, σημαντική στη μαθηματική εκπαίδευση είναι η χρήση των αναπαραστάσεων. Η έννοια της αναπαράστασης παρουσιάζεται συνήθως με τη σχηματική διάκριση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων (Goldin & Kaput, 1996). Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις ορίζονται ως το σύνολο των νοητικών εικόνων, σκέψεων και εκφράσεων ενός ατόμου που του επιτρέπουν να συσχετίζει δεδομένα και καταστάσεις και να αξιολογεί κάθε φορά τα δεδομένα σε κύρια και δευτερεύοντα (Goldin & Kaput, 1996). Στις εξωτερικές αναπαραστάσεις εντάσσονται τα σύμβολα, διαγράμματα, σχήματα κ.λπ. που δύνανται να παρατηρηθούν. Αποτελούν μορφές εξωτερικών δηλώσεων του μαθητή που μας δίνουν τη δυνατότητα να παρατηρούμε το βαθμό κατανόησης μιας έννοιας ή διαδικασίας από το μαθητή. Από την άλλη, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν ερεθίσματα μεταφοράς πληροφοριακών δεδομένων, όπως είναι τα διαγράμματα, οι πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις, καθώς και τα συμβατικά σύμβολα που απαντώνται στα μαθηματικά.

Είναι αναγκαίο να υπογραμμιστεί η στενή συνάφεια μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποκτούν νόημα και μπορούν να ερμηνευτούν από το μαθητή στο βαθμό που υπάρχει ένα υπόβαθρο εσωτερικών αναπαραστάσεων, ως αποτέλεσμα γνώσεων και εμπειριών που προϋπάρχουν. Από την άλλη, η ύπαρξη ενός δομημένου συστήματος εσωτερικών αναπαραστάσεων διευκολύνει στην απεικόνιση περισσότερο συγκεκριμένων και επεξεργασμένων εξωτερικών αναπαραστάσεων. Συμπερασματικά, στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας εμπλέκονται με μια δυναμική σχέση, διαρκώς εξελισσόμενη και βελτιούμενη, τόσο εσωτερικά, όσο και εξωτερικά δίκτυα αναπαραστάσεων.

Στην προσχολική ηλικία η μαθηματική εκπαίδευση ενδιαφέρεται κύρια για μορφές εξωτερικών αναπαραστάσεων. Με τη βοήθεια αναπαραστάσεων δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να οργανώνουν τη γνώση και τη σκέψη τους (Shiakalli and Zacharos 2011). Εδώ ως δραστηριότητα αναπαράστασης θεωρείται κάθε γνωστική δραστηριότητα που στοχεύει στην κατασκευή και τη βελτίωση των συμβολικών αντιπροσωπεύσεων ενός αντικειμένου της φυσικής και κοινωνικο-πολιτιστικής πραγματικότητας (Van Oers 1997 και 1997, Poland και Van Oers 2007).

Σπάνια τα παιδιά στις πρώιμες εκπαιδευτικές βαθμίδες προσφεύγουν μόνα τους στη χρήση συμβόλων και σημειώσεων για να αναπαραστήσουν ποσότητες, ή να αποτυπώσουν μαθητικές σχέσεις και γενικότερα τις σκέψεις τους (Sinclair et al. 1983). Σήμερα η μαθηματική εκπαίδευση, ήδη από την προσχολική ηλικία, ενθαρρύνει τους μαθητές στην καταγραφή δεδομένων με σημειώσεις, σχήματα και σύμβολα. Τα παιδιά καλούνται συχνά να καταγράφουν ποσοτικά ή χωρικά δεδομένα και να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα με τη βοήθεια αναπαραστάσεων. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα παιδιά, κύρια στην προσχολική εκπαίδευση, συμμετέχουν σε δραστηριότητες με αντικείμενα και σχέσεις που βρίσκονται στο άμεσο αντιληπτικό τους πεδίο. Αυτό είναι το αφετηριακό πεδίο κάθε εκπαιδευτικής δραστηριότητας σ’ αυτό το επίπεδο της εκπαίδευσης. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση είναι οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν εκπαιδευτικός και παιδιά εντός της ομάδας τους ως φορείς γνώσεων και εργαλείων σκέψης για να εξηγήσουν μια έννοια, μια σχέση, ή τη διαδικασία επίλυσης κάποιου προβλήματος (Cai et al. 2005).

Ικανότητες των νηπίων σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης

Η σύγχρονη έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση ισχυρίζεται ότι απλές πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης μονοψήφιων αριθμών μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο διδασκαλίας για τους μαθητές και τις μαθήτριες της προσχολικής εκπαίδευσης (Clements and Sarama 2009, Hughes 1986, Nunes και Bryant 1996), με την προϋπόθεση ότι το διδακτικό ενδιαφέρον θα συγκεντρώνεται κύρια στις νοητικές διεργασίες των παιδιών και όχι στην τυπολογία των γραπτών απαντήσεων με την χρήση του μαθηματικού συμβολισμού (Kamii και De Clark 1985).

Η δυνατότητα των νηπίων να ανταποκριθούν επιτυχώς σε απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης προϋποθέτει την απόκτηση κάποιων βασικών ψυχολογικών ικανοτήτων, όπως λόγω χάρη είναι το «σχήμα διαδοχής» (successor schema) και το σχήμα «μέρος-μέρος-όλο» (part-part-whole schema) (Resnick 1983).

Το σχήμα διαδοχής σχετίζεται με την ικανότητα εσωτερικής αναπαράστασης μιας νοητής αριθμητικής γραμμής που επιτρέπει στο παιδί να συγκρίνει δύο αριθμούς, χωρίς την ανάγκη της προσφυγής στις συγκεκριμένες ποσότητες. Η κατάκτηση του συγκεκριμένου σχήματος από τα παιδιά δίνει τη δυνατότητα επιτυχούς ανταπόκρισης σε πράξεις πρόσθεσης όπως «5+2» ή «5-3» μέσω της «μετατόπισης» στη νοητή αριθμητική γραμμή δύο βήματα δεξιά ή δύο βήματα δεξιά, αντίστοιχα. Μια απλή μορφή εφαρμογής του σχήματος διαδοχής είναι η «μετατόπιση» στην αριθμητική γραμμή κατά «ένα περισσότερο» ή «ένα λιγότερο» βήμα, στις περιπτώσεις που προσθέτουμε ή αφαιρούμε ένα μόνο αντικείμενο (Shane 1999).

Το γνωστικό σχήμα «μέρος-μέρος- όλο» σχετίζεται με τη νοητική αναπαράσταση του αριθμού ως σύνθεσης επιμέρους ποσοτήτων, με ποικίλους τρόπους. Για παράδειγμα, μια ποσότητα πέντε αντικειμένων μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα στο ένα χέρι και ένα στο άλλο, τρία στο ένα και δύο στο άλλο, κ.λπ. Εδώ, η χρήση συγκεκριμένου υλικού μπορεί να συνεισφέρει ουσιαστικά στην οικοδόμηση του γνωστικού σχήματος (Shane 1999).

Με τα προηγούμενα γνωστικά σχήματα σχετίζονται τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης που απαντώνται στην προσχολική εκπαίδευση και τις πρώτες σχολικές βαθμίδες.

Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση μικρών παιδιών τυποποίησε τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης στις επόμενες κατηγορίες (Nunes και Bryant 1996, Vergnaud 1979, 1983, Αντωνόπουλος κ.ά. 2008).

Μια πρώτη κατηγορία προβλημάτων είναι αυτά που προκύπτουν από την αλλαγή (θετική ή αρνητική) μια ποσότητας, που στη βιβλιογραφία καταγράφονται ως προβλήματα «αλλαγής κατάστασης» (Nunes και Bryant 1996) ή προβλήματα «μεταβολής του μέτρου» (Vergnaud 1979 και 1983). Η περίπτωση του σχήματος διαδοχής που συναντήσαμε προηγούμενα, είναι μια απλουστευμένη μορφή αυτού του τύπου προβλημάτων.

Μια άλλη κατηγορία προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης προκύπτει όταν δύο ποσότητες ενώνονται για να δημιουργήσουν μια καινούργια. Η περίπτωση του σχήματος «μέρος-μέρος-όλο», που συναντήσαμε προηγούμενα είναι μια ειδική περίπτωση των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας.

Τέλος, μια επόμενη κατηγορία προβλημάτων περιέχει καταστάσεις σύγκρισης δύο ή περισσοτέρων ποσοτήτων.

Σε όλες τις κατηγορίες προβλημάτων που παρατίθενται εδώ, ο βαθμός δυσκολίας ενός προβλήματος ποικίλει και εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη δομή του, καθώς και τη λεκτική του διατύπωση. Ειδικότερα το θέμα της ελλιπούς κατανόησης των λεκτικών προβλημάτων από τους μικρούς μαθητές, θίγεται συχνά τις σχετικές έρευνες (π.χ. Hudson 1983), γι αυτό και προτείνονται τρόποι λεκτικής αναδιατύπωσης και κατάλληλες διδακτικές στρατηγικές, όπως είναι η χωρική αναπαράσταση των εμπλεκομένων στο πρόβλημα ποσοτήτων, μέσω της χρήσης συγκεκριμένου υλικού, ώστε τα προβλήματα να είναι κατανοητά από τους μαθητές (Hudson 1983, Nunes and Bryant 1996).

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η διερεύνηση της ικανότητας παιδιών νηπιαγωγείου να επιλύουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης μικρών ποσοτήτων.

Ειδικότερα, τα ερευνητικά ερωτήματα που θα επιχειρηθεί να απαντηθούν είναι τα εξής:

Μπορεί η χρήση συγκεκριμένου υλικού να συνεισφέρει στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης από παιδιά προσχολικής εκπαίδευσης;

Επιπρόσθετα, η αναπαράσταση των χρησιμοποιούμενων ποσοτήτων, μπορεί να είναι επιβοηθητική στην επίλυση των εν λόγω προβλημάτων;

Η αντιμετώπιση των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, στην παρούσα έρευνα, βασίζεται στο μοντέλο της ζυγαριάς (παλάντζα). Στο συγκεκριμένο μοντέλο χρησιμοποιούνται συγκεκριμένα αντικείμενα που ελαφρύνουν το γνωστικό φορτίο που επωμίζονται οι μαθητές όταν είναι αναγκασμένοι να χρησιμοποιούν σύμβολα και αναπαραστάσεις, που συχνά δεν έχουν γι' αυτούς νόημα. Το μοντέλο της ζυγαριάς προτείνεται κύρια για την επίλυση γραμμικών (πρωτοβάθμιων) εξισώσεων, ως ένα μεταβατικό στάδιο στην πορεία ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης των παιδιών (Boulton-Lewis et al. 1997). Εν τούτοις, στην παρούσα έρευνα επιχειρούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο της ζυγαριάς για την εισαγωγή απλών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης στην προσχολική εκπαίδευση. Κρίνουμε ότι, οι δυσκολίες που προκύπτουν από την έννοια της εξίσωσης «απορροφώνται» από το χρησιμοποιούμενο εργαλείο, ενώ η σύγκριση των ποσοτήτων περιβάλλεται από ενδιαφέρουσα για τα παιδιά νοηματοδότηση.

Μέθοδος

Το δείγμα της έρευνας

Η έρευνα έγινε σε ένα δημόσιο νηπιαγωγείο ελληνικής επαρχιακής πόλης, με παιδιά που στην πλειονότητά τους ανήκαν σε χαμηλά και μεσαία κοινωνικοοικονομικά στρώματα. Το δείγμα αποτελείται από δώδεκα νήπια, ηλικίας 5.6 ετών περίπου. Στην έρευνα συμμετέχουν δυάδες παιδιών (έξι δυάδες) και υλοποιείται σε μια γωνιά της αίθουσας διδασκαλίας.

Για τη διευκόλυνση στην καταγραφή των υποκειμένων της έρευνας, τα υποκείμενα ποσότητες αντικειμένων μέχρι το δέκα και οι μαθητές του δείγματός μας δεν αντιμετώπισαν κανένα πρόβλημα.

Τέλος, όλες οι δραστηριότητες μαγνητοσκοπήθηκαν και το μαγνητοσκοπημένο υλικό αποτέλεσε τη βάση για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας.

Το σενάριο

Το σενάριο είναι ένα σύντομο παραμύθι με μικρές ιστορίες που διευκολύνουν στη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Αναλυτικότερα, το σενάριο αναφέρεται σε μια νεράιδα, που δύο παιδιά, ο Λουκάς και η Μαργαρίτα, για να την ικανοποιήσουν της προσφέρουν καραμέλες.

Πρώτη δραστηριότητα: Η πρώτη δραστηριότητα είναι εισαγωγική και σκοπός της είναι η εξοικείωση των παιδιών με τη λειτουργία της ζυγαριάς.

Εδώ, σύμφωνα με το σενάριο, η μαμά του Λουκά και της Μαρίας τους έδωσε μια σακούλα με καραμέλες για να τις δώσουν στη νεράιδα. Τα παιδιά θα πρέπει να μοιράσουν τις καραμέλες στη ζυγαριά (κάθε πλευρά της ζυγαριάς αντιστοιχεί σε ένα παιδί), ώστε η νεράιδα να είναι εξίσου ικανοποιημένη και από τα δύο παιδιά.

Στα παιδιά δίνεται μια σακούλα με καραμέλες και τους ζητείται να μοιράσουν στις δύο πλευρές του ζυγού, όσες απ’ αυτές θέλουν. Όταν ο ζυγός ισορροπήσει παροτρύνονται να μετρήσουν πόσες είναι σε κάθε πλευρά.

Δεύτερη δραστηριότητα: Σκοπός εδώ είναι η επίλυση ενός προβλήματος αφαίρεσης με γνωστούς και το μειωτέο και τον αφαιρετέο.

Συνέχεια της διήγησης: «Το βράδυ τα δύο αδέρφια σκέπασαν την ζυγαριά για να μη σκονιστούν οι καραμέλες και την άφησαν στο παράθυρό τους για να βρει η νεράιδα τις καραμέλες. Όμως ένα σκανταλιάρικο καλικαντζαράκι ζήλεψε και πήρε δύο καραμέλες από την μεριά του Λουκά».

Ζητείται από τα παιδιά να βρουν από πια πλευρά πήρε τις δύο καραμέλες το καλικαντζαράκι και στην συνέχεια να βρουν πόσες καραμέλες απέμειναν στο μέρος του Λουκά. Η μαθηματική μορφή της δραστηριότητας είναι: α-β=χ, με άγνωστο το αποτέλεσμα της αφαίρεσης.

Τρίτη δραστηριότητα: Σκοπός της είναι η επίλυση προβλήματος αφαίρεσης με άγνωστο τον αφαιρετέο.

Συνέχεια της διήγησης: «Ο Λουκάς ζήτησε από τη μαμά του καραμέλες, τόσες όσες του έλειπαν και τις έβαλε στη ζυγαριά. Αυτό το βράδυ πέρασε από το σπίτι τους ένα λιχούδικο ξωτικό και πήρε μερικές καραμέλες (αφαιρέσαμε μια καραμέλα από τη μεριά της Μαρίας-τα παιδιά δε βλέπουν την αλλαγή). Το πρωί τα παιδιά είδαν τη ζυγαριά να γέρνει προς τη μεριά του Λουκά».

Αρχικά ζητείται να βρεθεί η νέα ποσότητα στη μεριά του Λουκά. Στη συνέχεια ζητείται να βρουν τις καραμέλες που το εξωτικό πήρε από τη μεριά της Μαρίας. Η μαθηματική μορφή των δραστηριοτήτων εδώ είναι: α+β=χ και α-χ=β, όπου στην πρώτη περίπτωση άγνωστο είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης και στη δεύτερη ο αφαιρετέος χ.

Τέταρτη δραστηριότητα: Σκοπός είναι η επίλυση προβλήματος πρόσθεσης με άγνωστο το δεύτερο προσθετέο.

Συνέχεια της διήγησης: «Αφού η Μαρία πήρε τις καραμέλες που της έλειπαν, τα παιδιά σκέπασαν πάλι τη ζυγαριά και την άφησαν έξω από το παράθυρό τους. Το βράδυ εκείνο πέρασε η νεράιδα και κοντοστάθηκε στο παράθυρο των παιδιών. Με χαρά ανακάλυψε τις καραμέλες που την περίμεναν. “Τι καλά παιδάκια” σκέφτηκε! “Θα ήταν κρίμα να πάρω τις καραμέλες τους”! Κι έτσι έβαλε κάποιες καραμέλες (βάζουμε δύο καραμέλες-τα παιδιά δε βλέπουν) στη μια μεριά της ζυγαριάς.

Το επόμενο πρωινό τα δύο αδέρφια ανακάλυψαν ότι η ζυγαριά έγερνε προς τη μεριά της Μαρίας». Η μαθηματική μορφή της δραστηριότητας είναι: α+χ=β.

Ζητείται να βρεθεί η πλευρά που έβαλε τις καραμέλες η νεράιδα και να υπολογιστούν πόσες αριθμήθηκαν ως εξής: Η πρώτη ομάδα συγκροτήθηκε από τα υποκείμενα Υ1 και Υ2, η δεύτερη από τα Υ3 και Υ4, κ.λπ.

Το εκπαιδευτικό υλικό

Για την υλοποίηση των δραστηριοτήτων της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν τα εξής υλικά:

Ένας ζυγός (παλάντζα), που στις δύο πλευρές της προσθέτουμε ή αφαιρούμε ποσότητες αντικειμένων.

Μια χάρτινη κατασκευή με ανοίγματα («παραθυράκια»), που δίνει τη δυνατότητα της αναπαράστασης των χρησιμοποιούμενων στη ζυγαριά ποσοτήτων. Σε κάθε «άνοιγμα» «παραθύρου» εμφανίζεται ένας κόκκινος κύκλος που αντιστοιχεί σε ένα φυσικό αντικείμενο που χρησιμοποιείται στη ζυγαριά. Κάθε μαθητής της δυάδας διαθέτει το δικό του αναπαραστατικό «εργαλείο».

Χάρτινες φιγούρες των ηρώων που αναφέρονται στο σενάριο-παραμύθι που κατασκευάστηκε για την περίσταση, καθώς και καραμέλες που χρησιμοποιούνται στο σενάριο (φωτ. 1).

Φωτογραφία 1. Το εκπαιδευτικό υλικό.

Η διαδικασία

Ο ζυγός είναι ένα πρόσφορο εκπαιδευτικό μέσο για τη διδασκαλία προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, καθώς και εξισώσεων, στις τάξεις που προβλέπεται η εισαγωγή τους (Austin και Vollrath, 1989). Το πλεονέκτημα της ζυγαριάς είναι ότι δίνει τη δυνατότητα άμεσης αντιληπτικής επαλήθευσης κάθε βήματος, εφόσον σκοπός μας είναι η ισορροπία. Στην περίπτωση της έρευνάς μας χρησιμοποιούνται φυσικά αντικείμενα στις δύο πλευρές της ζυγαριάς και τα παιδιά καλούνται να προσδιορίσουν τον αριθμό των αντικειμένων που πρέπει να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά. Με αυτό τον τρόπο η ανάγκη για πρόσθεση ή αφαίρεση αντικειμένων προκύπτει από το σενάριο και την ανάγκη να ισορροπήσει η ζυγαριά.

Οι δραστηριότητες που παρουσιάζονται εδώ αντιστοιχούν σε προβλήματα σύνθεσης δύο ποσοτήτων. Με μαθηματικό συμβολισμό τα προβλήματα έχουν τη μορφή: $\alpha+\beta=\gamma$. Ο βαθμός δυσκολίας τους εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα δεδομένα και τη ζητούμενη κάθε φορά ποσότητα. Γενικά έχουν επισημανθεί πρόσθετες δυσκολίες στις περιπτώσεις που ένας από τους προσθετέους είναι άγνωστος (Nunes and Bryant 1996).

Να υπογραμμίσουμε ότι προηγήθηκε αξιολόγηση της ικανότητας των παιδιών να απαριθμούν καραμέλες μπήκαν στη μεριά της Μαρίας.

Πέμπτη δραστηριότητα: Σκοπός της είναι η επίλυση προβλήματος πρόσθεσης με γνωστούς και τους δύο προσθετέους.

Συνέχεια της διήγησης: «Η νεράιδα σκέφτηκε ότι μπορεί να στενοχώρησε το Λουκά, γι αυτό το βράδυ άφησε δύο καραμέλες στη μεριά του». Η μαθηματική μορφή της δραστηριότητας είναι: $α+β=χ$.

Ζητείται να προσδιοριστούν οι καραμέλες που έχει τώρα ο Λουκάς.

Διδακτικές παρεμβάσεις

Η ερευνήτρια παρεμβαίνει όπου κρίνεται αναγκαίο, ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν τη λειτουργία του υλικού και να διευκολύνει στην επιτυχή αντιμετώπιση των δυσκολιών. Παρατίθενται ενδεικτικές ερωτήσεις που τίθενται από την ερευνήτρια:

- *Στις περιπτώσεις που η ζυγαριά δεν ισορροπεί*: «Γιατί νομίζεται ότι γέρνει από δω (δείχνει) η ζυγαριά;», «Σε ποια πλευρά έχουμε περισσότερες καραμέλες;», «Αν οι καραμέλες είναι ίσες και στις δύο πλευρές, η ζυγαριά θα γέρνει;»

- *Στις περιπτώσεις που η ζυγαριά ισορροπεί*: «Υπάρχουν σε κάποια πλευρά περισσότερες καραμέλες;», «Αν είχαμε εδώ (δείχνει) περισσότερες καραμέλες, η ζυγαριά θα ήταν ευθεία (θα ισορροπούσε);»

Σε όλες τις περιπτώσεις θα παιδιά αφήνονται να χειρίζονται μόνα τους τη ζυγαριά και να πειραματίζονται με τις ποσότητες.

Αποτελέσματα

Στην ανάλυση των αποτελεσμάτων που θα παρουσιαστούν εδώ διερευνάται η ικανότητα των παιδιών στην επίλυση των προβλημάτων που τέθηκαν και επισημαίνονται οι στρατηγικές επίλυσης που επιλέγονται. Επίσης επισημαίνονται στοιχεία του παιδαγωγικού πλαισίου και ειδικότερα οι μορφές αλληλεπίδρασης μεταξύ των παιδιών και μεταξύ των παιδιών και της νηπιαγωγού.

Πρώτη δραστηριότητα: Η πρώτη δραστηριότητα ήταν εισαγωγική και σκοπός της ήταν η εξοικείωση των παιδιών με τη λειτουργία της ζυγαριάς.

Αναλυτικότερα, για τη δημιουργία δύο ίσων συνόλων με καραμέλες, τα παιδιά των περισσότερων ομάδων (τέσσερεις ομάδες) αρχικά προσφεύγουν στην απαρίθμηση. Οι άλλες δύο ομάδες συσχετίζουν την ισότητα των ποσοτήτων με την ισορροπία της ζυγαριάς. Διαπιστώνουν ότι στην πλευρά που η ζυγαριά γέρνει υπάρχουν περισσότερες καραμέλες και πειραματίζονται τοποθετώντας διαδοχικά μια-μια τις καραμέλες στην άλλη πλευρά, ώσπου η ζυγαριά να ισορροπήσει. Μετρώντας τον αριθμό των αντικειμένων σε κάθε πλευρά της ζυγαριάς, τα παιδιά αντιλαμβάνονται ότι η ζυγαριά ισορροπεί (είναι στην «ευθεία» όπως λένε), επειδή έχουν βάλει ίσο αριθμό και στα δύο μέρη της.

Η νηπιαγωγός-ερευνήτρια προτρέπει τις τέσσερεις πρώτες ομάδες να χρησιμοποιήσουν τη ζυγαριά για να δημιουργήσουν ίσες ποσότητες αντικειμένων. Αρχικά τα παιδιά κατανοούν ότι η ζυγαριά γέρνει προς την πλευρά που υπάρχει μεγαλύτερη ποσότητα καραμελών. Η συνήθης στρατηγική που ακολουθείται για την εξίσωση των ποσοτήτων στις δύο πλευρές είναι η στρατηγική της δοκιμής και του λάθους. Αφού, δηλαδή, βάλουν μια τυχαία ποσότητα καραμελών στις δύο πλευρές της ζυγαριάς, στη συνέχεια με τη διαδοχική τοποθέτηση καραμελών στην πλευρά που είναι ανυψωμένη, φτάνουν σε μια κατάσταση ισορροπίας. Σ’ αυτές τις περιπτώσεις τα παιδιά καλούνται με μετρήσουν την ποσότητα κάθε πλευράς. Η ίδια διαδικασία, με διαφορετικές κάθε φορά ποσότητες, υλοποιείται τρεις φορές για όλες τις ομάδες. Η ερευνήτρια σε κάθε περίπτωση θέτει ερωτήσεις αντίστοιχες με αυτές αναφέρονται στη μεθοδολογία.

Δεύτερη δραστηριότητα: Σε αυτή τη δραστηριότητα αρχικά ζητείται από τα παιδιά να προβλέψουν τι θα συμβεί στη ζυγαριά αν αφαιρεθούν δύο καραμέλες από την μια πλευρά. Τρεις ομάδες παιδιών αποτυγχάνουν να προβλέψουν σωστά (Πρώτο απόσπασμα διαλόγου).

1.1 *Ε (Ερευνήτρια)*: Από ποια μεριά πιστεύεις ότι θα γύρει η ζυγαριά;
1.2 *Υ1*: Από εδώ (δείχνει την πλευρά του Λουκά, απ' όπου πρόκειται να αφαιρεθούν οι καραμέλες).
1.3 *Ε*: Γιατί;
1.4 *Υ1*: Γιατί θα πάρει τις καραμέλες από δω.
1.5 *Ε*: Από ποια μεριά θα γέρνει, από εκεί που θα έχει τις περισσότερες ή από εκεί που θα έχει τις λιγότερες;
1.6 *Υ1*: (Δεν απαντά).

Πρώτο απόσπασμα διαλόγου. Δυσκολία πρόβλεψης της συμπεριφοράς του ζυγού

Η ερευνήτρια καλεί τα παιδιά να αφαιρέσουν τις δύο καραμέλες και να παρατηρήσουν τη συμπεριφορά της ζυγαριάς. Στη συνέχεια καλούνται να προσδιορίσουν τον αριθμό των καραμελών που απέμειναν στην πλευρά που αφαιρέθηκαν οι δύο καραμέλες.
Μόνο μια ομάδα παιδιών μπόρεσε να ανταποκριθεί επιτυχώς στο συγκεκριμένο έργο (Δεύτερο απόσπασμα διαλόγου).

2.1 *Ε*: Τώρα (μετά την αφαίρεση των δύο καραμελών), έχουν ίσες καραμέλες και στις δύο πλευρές;
2.2 *Υ3*. Όχι, εδώ έχει λιγότερες (δείχνει τη σωστή πλευρά).
2.3 *Ε*. Μπορείτε να μου πείτε χωρίς να μετρήσετε πόσες καραμέλες έχει τώρα ο Λουκάς (Η ερευνήτρια καλύπτει αυτή την πλευρά του ζυγού);
2.4 *Υ4*. Εδώ (η πλευρά της Μαρίας) έχει μία, δύο, …, πέντε.
Το νήπιο δείχνει τα πέντε δάχτυλα του χεριού του, διπλώνει τα δύο δάκτυλά του και απαριθμεί:
2.5. *Υ4*. Ένα, δύο, τρία. Έχει τρεις καραμέλες!

Δεύτερο απόσπασμα διαλόγου. Επίλυση με τη χρήση δακτύλων.

Οι υπόλοιπες πέντε ομάδες προτρέπονται να χρησιμοποιήσουν το υλικό που αναπαριστά τις ποσότητες και να σημειώσουν μια ποσότητα ίση με την αρχική, που υπήρχε σε κάθε πλευρά της ζυγαριάς. Στη συνέχεια καλούνται να καλύψουν τόσα «παραθυράκια», όσα και οι καραμέλες που αφαιρούνται (φωτ. 2). Οι ενδείξεις που απομένουν δίνουν τον αριθμό των καραμελών που απομένουν στο μέρος του Λουκά. Στη χρήση αυτής της αναπαραστατικής διαδικασίας εισάγεται και η ομάδα που δίνει εξ αρχής επιτυχή απάντηση, ώστε να εξοικειωθεί με τη χρήση της.
Συμπερασματικά, σ' αυτή τη δραστηριότητα ενώ όλες οι ομάδες των παιδιών κατανοούν ότι η ισορροπία της ζυγαριάς προϋποθέτει την εξίσωση των ποσοτήτων στις δύο πλευρές, δεν μπορούν να προβλέψουν σωστά τη συμπεριφορά της ζυγαριάς στην περίπτωση που αφαιρεθεί μια ποσότητα από τη μια πλευρά. Τέλος, τα παιδιά αρχίζουν να εξοικειώνονται με την προτεινόμενη αναπαραστατική μέθοδο (φωτ. 2).

Φωτογραφία 2. Αναπαράσταση των ποσοτήτων.

Τρίτη δραστηριότητα: Και στην περίπτωση αυτού του έργου, τέσσερεις ομάδες παιδιών ισχυρίζονται ότι η ζυγαριά θα γύρει προς την πλευρά που θα αφαιρεθούν οι καραμέλες (Τρίτο απόσπασμα διαλόγου).

3.1 *Ε*: Τι θα κάνει ο ζυγός τώρα που πήραμε καραμέλες;
3.2 *Υ7*: Θα γυρίσει κάπου.
3.4 *Υ8*: Από κει που πήραμε καραμέλες. Από το «καλαθάκι» που πήρε, από κει θα γυρίσει.
3.5 *Ε*: Εάν πάρουμε καραμέλες από την πλευρά σου (απευθύνεται στο Υ7), προς τα πού θα γύρει η ζυγαριά;
3.6 *Υ7*: Προς εμένα.

Τρίτο απόσπασμα διαλόγου. Επιμονή του λανθασμένου νοητικού σχήματος

Προκειμένου τα παιδιά να απαντήσουν στο πρόβλημα που τους τίθεται χρησιμοποιούνται δύο στρατηγικές αρίθμησης: η μια καταγράφεται στη βιβλιογραφία ως «αρίθμησης από» και η άλλη, ως «αρίθμηση όλων» (Kamii και De Clark 1985). Δηλαδή, στην πρώτη περίπτωση τα παιδιά γνωρίζουν την αρχική ποσότητα (έξι καραμέλες) και συνεχίζουν την αρίθμηση στον αριθμό επτά και οκτώ, ενώ στη δεύτερη απαριθμούν όλες τις καραμέλες, ως ενιαίο σύνολο.

Στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην εύρεση των ποσοτήτων, η ερευνήτρια τα παροτρύνει να χρησιμοποιήσουν τα «παραθυράκια». Τα παιδιά αρχίζουν να εξοικειώνονται με τη χρήση των «παραθύρων» και «ανοίγουν» και «κλείνουν» παράθυρα, ανάλογα με τις ποσότητες που περιγράφονται στο σενάριο (Τέταρτο απόσπασμα διαλόγου).

Η ερευνήτρια ζητάει από τα παιδιά να δείξουν πόσα «παράθυρα» πρέπει να είναι ανοιχτά.
4.1 *Ε*: Στο καλαθάκι (στη μία πλευρά της ζυγαριάς) είναι έξι καραμέλες. Πόσα παραθυράκια πρέπει να έχουμε ανοιχτά;
4.2 *Υ3*: (Μετράει) Μια, δύο,…, έξι. Έξι καραμέλες.
4.3 *Ε*: Αν πάρουμε μια καραμέλα, πόσα «παραθυράκια» πρέπει να κλείσουμε;
4.4 *Υ3*: Ένα.
4. 5 *Ε*: Πόσες καραμέλες θα μείνουν.

4. 6 *Υ3*: (Απαριθμεί τα σύμβολα) Πέντε.

Τέταρτο απόσπασμα διαλόγου. Η αναπαράσταση των ποσοτήτων διευκολύνει στις πράξεις

Τέταρτη δραστηριότητα

Σ' αυτή την περίπτωση τα παιδιά όλων των ομάδων πρόβλεψαν σωστά ότι οι καραμέλες μπήκαν από στην πλευρά της Μαρίας.

Προκειμένου να υπολογίσουν τις καραμέλες που μπήκαν στο μέρος της Μαρίας, συνήθως προσφεύγουν στις αναπαραστάσεις των ποσοτήτων με τη χρήση των «παραθύρων». Αρχικά τα παιδιά έχουν τόσα «παράθυρα» ανοιχτά, όσες είναι και οι καραμέλες (τέσσερα). Μετά την τοποθέτηση αγνώστου για τα παιδιά αριθμού καραμελών, ζητείται να χρησιμοποιηθούν οι αναπαραστάσεις για να προσδιοριστεί η ποσότητα που τοποθετήθηκε. Το επόμενο απόσπασμα διαλόγου (Πέμπτο), δείχνει τη χρήση των αναπαραστάσεων από μια δυάδα παιδιών, καθώς και τον καθοδηγητικό ρόλο της ερευνήτριας.

5.1 *Ε*: Πόσες περισσότερες καραμέλες έχει τώρα αυτή η πλευρά (δείχνει);
5.2 *Υ10*: (Απαριθμεί όλες τις καραμέλες) Μια, δύο, …, έξι.
5.3 *Ε*: Πόσα παραθυράκια έχετε ανοιχτά;
5.4 *Υ10*: Τέσσερα.
5.5 *Ε*: Κι εδώ (στην πλευρά με τις περισσότερες καραμέλες), πόσες έχει;
5.6 *Υ10*: Έξι
5.7 *Ε*: Πόσα παραθυράκια πρέπει να έχετε ανοικτά;
5.8 *Υ10*: Έξι.
5.9 *Ε*: Πόσα παραθυράκια πρέπει να ανοίξεις ακόμη για να έχεις έξι παραθυράκια ανοικτά;
Το Υ11 ανοίγει ένα «παραθυράκι».
5.10 *Ε*: Πόσα έχεις ανοιχτά τώρα;
5.12 *Υ10*: (Απαριθμεί) Ένα, δύο, …, πέντε.
5.13 *Ε*: Εσείς όμως πόσες καραμέλες μου είπατε ότι υπάρχουν;
5.14 *Υ11*: Έξι (ανοίγει άλλο ένα).
5.15 *Ε*: Πόσες καραμέλες μπήκαν στο καλαθάκι της Μαρίας;
5.16 *Υ11*: Δύο!

Πέμπτο απόσπασμα διαλόγου. Ο καθοδηγητικός ρόλος της ερευνήτριας.

Πέμπτη δραστηριότητα. Εδώ η πλειονότητα των ομάδων (πέντε στις έξι) προέβλεψε σωστά ότι, στην περίπτωση που προσθέσουμε δύο καραμέλες στην ελαφρύτερη πλευρά, τότε η ζυγαριά θα ισορροπήσει. Τον ισχυρισμό τους τα παιδιά τον στηρίζουν με δύο, κατά βάση, τρόπους. Στη μια περίπτωση χρησιμοποιούν τη στρατηγική της «απαρίθμησης από» (αφού γνωρίζουν την υπάρχουσα ποσότητα, συνεχίζουν: πέντε, έξι), είτε προσφεύγουν στη χρήση της αναπαράστασης των ποσοτήτων, ανοίγοντας δύο ακόμη «παραθυράκια» και απαριθμώντας το σύνολο των ανοιγμένων παραθύρων (Έκτο απόσπασμα διαλόγου).

6.1 Ε: Η νεράιδα άφησε άλλες δύο καραμέλες. Πόσα ακόμα («παραθυράκια») πρέπει να ανοίξεις;
6.2 Υ9: Δύο (Ανοίγει δυο «παραθυράκια»)
6.3 Ε: Τώρα πόσες είναι όλες οι καραμέλες;
6.4 Υ9: (Απαριθμεί όλες τις συμβολικές ποσότητες) Ένα, δύο, …, έξι. Είναι έξι καραμέλες.

Έκτο απόσπασμα διαλόγου. Η στρατηγική της «αρίθμησης όλων»

Συμπεράσματα - Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκε η ικανότητα μαθητών προσχολικής εκπαίδευσης να επιλύουν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Επιπλέον, διερευνήθηκε η αποτελεσματικότητα διδακτικών μεθόδων, όπως η χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς, στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών στην επίλυση προβλημάτων. Εν τούτοις, ο σχεδιασμός της έρευνας είχε έναν πειραματικό χαρακτήρα, γεγονός που περιορίζει την εμβέλεια των ευρημάτων.

Γενικά, τα νήπια της έρευνας δυσκολεύονται να ανταποκριθούν στα προβλήματα που τους τίθενται και ειδικότερα να προτείνουν λύσεις χωρίς προσφυγή στο συγκεκριμένο υλικό. Μια εναλλακτική περίπτωση χρήσης συγκεκριμένων αντικειμένων είναι η προσφυγή στη χρήση των δακτύλων, που επισημαίνεται στο Δεύτερο απόσπασμα διαλόγου.

Σημαντική είναι η συμβολή του εκπαιδευτικού υλικού. Η χρήση της ζυγαριάς, που βασίζεται στη λογική της ισορροπίας, δίνει τη δυνατότητα για ανάπτυξη δραστηριοτήτων με την πρόσθεση ή αφαίρεση μικρών ποσοτήτων. Επιπλέον, σημαντική ήταν η δυνατότητα αναπαράστασης των ποσοτήτων, που διαδραματίζει ένα διαμεσολαβητικό ρόλο μεταξύ του συγκεκριμένου χειρισμού των ποσοτήτων και της νοητικής αναπαράστασης ποσοτήτων και πράξεων.

Όμως, η οικειοποίηση του εκπαιδευτικού υλικού και η χρήση του στην προοπτική που χρησιμοποιείται εδώ, δεν γίνεται αυθόρμητα από τους μαθητές. Η κατανόηση της λειτουργίας της ζυγαριάς ενέχει δυσκολίες που εμφανιζόταν συχνά στην διάρκεια της έρευνας (Πρώτο και Τρίτο απόσπασμα διαλόγων). Η αντίληψη ότι η ζυγαριά θα γύρει προς την πλευρά που αφαιρούνται οι καραμέλες, είναι ισχυρή στα νήπια (διάλογοι 3.5-3.6) και φαίνεται να αποβάλλεται μόνο στα τελευταία έργα της έρευνας. Επίσης, η δυνατότητα αναπαράστασης των ποσοτήτων, που δίνεται στα παιδιά μέσω των «παραθύρων» που «ανοιγοκλείνουν», προϋποθέτει τη διδασκαλία στη χρήση αυτού του εργαλείου. Πράγματι, τα νήπια αρχικά δεν κατανοούν τη συσχέτιση των συγκεκριμένων αντικειμένων (των καραμελών) με τη μορφή αναπαράστασής τους που προτείνεται με τα «παραθυράκια». Επιπλέον, δεν κατανοούν πώς η συγκεκριμένη μορφή αναπαράστασης μπορεί να συνεισφέρει στην επίλυση των προβλημάτων. Αρχικά παρατηρήθηκε τα παιδιά να «ανοιγοκλείνουν» μηχανικά τα «παράθυρα», δηλαδή τη μορφή αναπαράστασης που προτείνεται εδώ, χωρίς οι κινήσεις τους να είναι ενταγμένες σε μια στρατηγική επίλυσης. Όμως, η διδακτική παρέμβαση της ερευνήτριας (Τέταρτο απόσπασμα διαλόγου) εντάσσει την προτεινόμενη μορφή αναπαράστασης, στα εργαλεία επίλυσης του προβλήματος (Vygotsky 1978).

Οι μορφές αλληλεπίδρασης που αναπτύχθηκαν στο εσωτερικό της ομάδας, επιτέλεσαν επίσης έναν επιβοηθητικό ρόλο στη χρήση του υλικού για την επίλυση των προβλημάτων. Στο πλαίσιο της δυάδας, ορισμένα παιδιά, που δείχνουν γνωστικά περισσότερο εξελιγμένα (Vygotsky 1978), συνεισφέρουν με τις υποδείξεις και τις παρεμβάσεις τους, όπως φαίνεται και στο επόμενο απόσπασμα διαλόγου (Έβδομο).

Το νήπιο (Υ3) μιας συγκεκριμένης ομάδας δυσκολεύεται στη χρήση της αναπαράστασης για την επίλυση του προβλήματος.

7.1 *Ε*: Έχεις τέσσερεις καραμέλες και σου δίνω και άλλες δύο. Πόσες είναι όλες οι καραμέλες; Μέτρησε με τα παραθυράκια.

Το νήπιο έχει ανοικτά τέσσερα «παράθυρα» και ανοίγει αλλά δύο. Ξεκινά τη μέτρηση από τα δύο που άνοιξε. Εδώ παρεμβαίνει το άλλο υποκείμενο που παρακολουθεί:

7.2 *Υ4*: Από εδώ ξεκινάμε (Του υποδεικνύει να μετρήσει από την αρχή).

7.3 *Υ4*: Ένα, δύο, …, έξι.

Έβδομο απόσπασμα διαλόγου. Αλληλεπίδραση στο εσωτερικό της ομάδας.

Η συνεισφορά της ερευνήτριας με τις διδακτικές της παρεμβάσεις είναι, επίσης, ουσιώδης. Με κατάλληλες ερωτήσεις (για παράδειγμα, διάλογοι 5.9, 5.13, 5.15, 7.1 κ.ά.) καθοδηγεί τα παιδιά να εντάξουν το συγκεκριμένο υλικό σε μια στρατηγική επίλυσης των προβλημάτων της έρευνας (Πέμπτο απόσπασμα διαλόγου).

Συμπερασματικά, η επίλυση απλών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας στην προσχολική εκπαίδευση. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ο ουσιώδης ρόλος του παιδαγωγικού πλαισίου ώστε να προσδοκούμε στη θετική ανταπόκριση των μαθητών. Ένα τέτοιο πλαίσιο είναι μαθησιακά λειτουργικό και κινητοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών που καλούνται να ανταποκριθούν στις συνθήκες που δημιουργούνται από το πλαίσιο. Παράλληλα αναδεικνύεται η σπουδαιότητα των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος. Το γεγονός αυτό υπογραμμίζει τη σημασία που οφείλει να δώσει η μαθηματική εκπαίδευση στην εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση αναπαραστάσεων και την ανάπτυξη της ικανότητάς τους να αξιολογούν, γιατί ένα διάγραμμα μπορεί να είναι χρήσιμο, ή ποια μορφή γραφικής αναπαράστασης είναι κατάλληλη σε μια δεδομένη κατάσταση για την επίλυση ενός προβλήματος (Diezman και English 2001).

Βέβαια, όπως τονίστηκε και προηγούμενα, η πειραματική μορφή της παρούσας έρευνας δεν δίνει τη δυνατότητα για γενικεύσιμα συμπεράσματα, τα οποία μπορεί να προκύψουν μόνο με μια συστηματική χρήση εκπαιδευτικού υλικού, σε μια αναπτυξιακή παιδαγωγική προοπτική επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Βιβλιογραφία

Austin, J.,D., Vollrath, H., J., (1989). Representing, solving, and using Algebraic equations. *The Mathematics Teacher*, 82: 608- 612.

Böhm, W. (2000). Maria Montessori. Στο J. Houssaye (επιμ.) *Δεκαπέντε Παιδαγωγοί. Σταθμοί στην Ιστορία της Παιδαγωγικής Σκέψης* (75-98), Μεταίχμιο, Αθήνα.

Boulton-Lewis, G. and Cooper, T.J., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L., and Mutch, S. (1997). Processing Load and the Use of Concrete Representations and Strategies for Solving Linear Equation. *Journal of Mathematical Behavior,* 16(4), 379-398.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Cai, J and Lester. K. F. Jr. (2005). Solution representations and pedagogical representations in Chinese and US classrooms. *Journal of Mathematical Behavior* 24: 221-237.

Clements, D. H. and Sarama, J. (2009*). Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach.* Routledge: New York and London.

Dienes, Z. (1964). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational.

Dienes, Z. P. (1964). *Mathematics in the Primary School.* Macmillan and Co., Melbourne.

Diezman, C., and English, L. (2001). Promoting the Use of Diagrams aw Tools for Thinking. In A. A. Cuoco, and F. R. Curcio (eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (77-89), Reston, Virginia: N.C.T.M.

Gettman, D. (2003). *Montessori. Learning Activities for Under-Fives.* Clio Press. Oxford, England.

Goldin, G. A., and Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, and B. Greer (eds.) *Theories of mathematical learning,* (397-430). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Heiland, H. (2000). Friedrich Fröbel. Στο J. Houssaye (επιμ.) *Δεκαπέντε Παιδαγωγοί. Σταθμοί στην Ιστορία της Παιδαγωγικής Σκέψης* (75-98), Μεταίχμιο, Αθήνα.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between sets. *Child Development*, 54, 84-90.

Hughes, M. (1986). *Children and Number: Difficulties in Learning Mathematics*. London: Blackwell.

Kamii, C., & Devries, R. (1980). *Group Games in Early Education*. *Implications of Piaget's Theory*. National Association for the Education of Young Children, Washington, D.C.

Kamii, C. & De Clark, G. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic*, Columbia University.

Manches, A., O'Malley, C., Benford, S. (2010). The role of physical representations in solving number problems: A comparison of young children's use of physical and virtual materials. *Computers & Education* 54: 622–640.

Martin, T., Lukong, A., & Reaves, R. (2007). The role of manipulatives in arithmetic and geometry. *Journal of Educational and Human Development*, 1(1).

Mix, K. (2010). Spatial tools for mathematical thought. In K. S. Mix, L. B. Smith & M. Gasser (eds.), *The spatial foundations of cognition and language*. New York: Oxford University Press.

Nunes, T. and Bryant, P. (1996). *Children doing Mathematics*. Blackwell publishers.

Poland, M. and Van Oers, B., (2007). Effects of schematizing on mathematical development. *European Early Childhood Education Research Journal*, 15(2), 269-293.

Resnick, L. B. (1983). A development theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Shane, R. (1999). Making connections: A "number curriculum" for preschoolers. *Applied image.*

Shiakalli, M.A. and Zacharos, K. (2012). The contribution of external representations in preschool mathematical problem solving. *International Journal of Early Years Education* (accepted for publication).

Sinclair, A., Siegrist, E., and Sinclair, H. (1983). Young children's ideas about the written number system. In D. Rogers & J. A. Sloboda (eds.), *The acquisition of symbolic skills* (pp. 535-541). New York: Plenum.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective.* Springer, U.S.A.

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a *Mathematical Sing?*- An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61(1-2)*, 163-182.

Sinclair, A., Siegrist, E., and Sinclair, H. (1983). Young children's ideas about the written number system. In D. Rogers, and J. A. Sloboda (eds.), *The acquisition of symbolic skills*, 535-541. New York: Plenum.

Uttal, D. H., Scudder, K. V., and DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology,* 18(1), 37–54.

Van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play. *European Early Childhood Education Research Journal* 4(1), 71 – 87.

Van Oers, B. (1997). On the Narrative Nature of Young Children's Iconic Representations: Some evidence and implications. *European Early Childhood Education Research Journal* 5(3), 237-245.

Vergnaud, G. (1979), Didactics and acquisition of "multiplicative structures" in secondary schools, In Archenhold W., et al. (eds.), *Cognitive Development Research in Science and Mathematics*, 190- 201.

Vergnaud, G. (1983), Multiplicative Structures. In Richard Lesh & Marsha Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, 127-174, Academic Press.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Zacharos, K., Antonopoulos, K., and Ravanis, K. (2011). Activities in mathematics education and teaching interactions. The construction of the measurement of capacity in preschoolers. *European Early Childhood Education Research Journal* , 19(4), 451-468.

Αντωνόπουλος, Κ., Τσιούνη, Π. και Ζαχάρος, Κ. (2008). Επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης σε διαφορετικά πλαίσια συμφραζομένων. *Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού,* Επιστημονική

Περιοδική Έκδοση της Ο.Μ.Ε.Ρ,, τεύχος 8, σελ. 9-24.
Ζαχάρος, Κ. (2007). *Οι μαθηματικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση και η διδασκαλία τους.* Μεταίχμιο, Αθήνα.
Ζαχάρος, Κ., Κόμης, Β., Μπακανδρέα, Ζ., Παπαδημητρίου, Κ., (2007), *Τα μαθηματικά στην προσχολική εκπαίδευση. Στρατηγικές προσέγγισης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης.* Νέα Παιδεία, 121, σελ. 78-94.