Διερεύνηση των γνώσεων μαθητών της Α' Λυκείου στις ανισώσεις α' βαθμού[1]

Σπύρος Παπακωστόπουλος, spapako1@yahoo.gr
Κώστας Ζαχάρος, zacharos@upatras.gr
Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η., Πανεπιστήμιο Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της έρευνας είναι η διερεύνηση των γνώσεων μαθητών της Α' Λυκείου σχετικά με την επίλυση ανισώσεων α' βαθμού με ένα άγνωστο. Ειδικότερα, διερευνούμε τη δυνατότητα μαθητών και μαθητριών να μεταφράζουν από την λεκτική διατύπωση στη μαθηματική συμβολική γλώσσα και αντίστροφα, καθώς και την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν ανισώσεις.
Δεκαοκτώ μαθητές της Α' Λυκείου καλούνται να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο με προβλήματα ανισώσεων. Η ανάλυση των ευρημάτων αναδεικνύει σημαντικά προβλήματα στην ικανότητα χειρισμού των ανισώσεων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ανισώσεις παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά καθώς εμφανίζονται σε πολλές θεματικές περιοχές, όπως η άλγεβρα, η τριγωνομετρία, ο γραμμικός προγραμματισμός, η μελέτη των συναρτήσεων, κ.ά. (Bazzini & Tsamir, 2002b). Συγκαταλέγονται μεταξύ των πιο χρήσιμων εργαλείων στα θεωρητικά και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, γεγονός που αποτυπώνεται και στο ενδιαφέρον που επιδεικνύουν τα αναλυτικά προγράμματα της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. NCTM standards, 2000). Αντίστοιχο ενδιαφέρον υπάρχει και στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του ελληνικού Γυμνασίου, καθώς και στο αναλυτικό πρόγραμμα της Α' Λυκείου. Στην Α' Λυκείου προβλέπεται η διδασκαλία της διάταξης πραγματικών αριθμών, των ιδιοτήτων των πράξεων σε σχέση με την διάταξη, της επίλυσης ανισώσεων πρώτου βαθμού και της έκφρασης των λύσεών τους με μορφή διαστημάτων.

Η έρευνα, που στοιχεία της θα παρουσιαστούν εδώ, εστιάζει το ενδιαφέρον της στη μελέτη του τρόπου σκέψης μαθητών της Α' Λυκείου στην αντιμετώπιση ανισοτικών σχέσεων και την επίλυση ανισώσεων, καθώς και στην επισήμανση συστηματικών λαθών και παραλείψεων κατά την ενασχόλησή τους με τα παραπάνω.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

2.1. Εξισώσεις-ανισώσεις: Μια ιστορική ασυμμετρία

[1] Παπακωστόπουλος, Σ. & Ζαχάρος, Κ. (2009). Διερεύνηση των γνώσεων μαθητών της Α' Λυκείου στις ανισώσεις α' βαθμού. *Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές*, 3^{ο} Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητικών Διδακτικής των Μαθηματικών, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, σελ. 719-727, Ρόδος.

Η ιστορία των ανισώσεων δεν είναι τόσο πλούσια όσο των εξισώσεων (Bagni, 2004). Ανισώσεις με την κανονική έννοια του όρου, μπορούν να συσχετιστούν με την ανάπτυξη του λογισμού των συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα στα προβλήματα μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης. Οι μαθηματικοί συνήθως εξέφραζαν το προς επίλυση πρόβλημα μέσω εξισώσεων και στη συνέχεια χρησιμοποιούσαν ανισώσεις προκειμένου να εκφράσουν κάποιες συνθήκες για τις λύσεις των εξισώσεων αυτών. Επιπλέον, ιστορικά, η λύση μιας ανίσωσης συνήθως προέκυπτε μέσα από την επίλυση μιας εξίσωσης που πρακτικά υποκαθιστούσε την τεθείσα ανίσωση. Παρόλο που σήμερα ο αυτόνομος ρόλος των ανισώσεων είναι εκπαιδευτικά αναγνωρισμένος, στην πρακτική της τάξης υφίσταται ακόμα μια λειτουργική εξάρτηση (Bagni, 2004). Για παράδειγμα, το σύνολο λύσεων μιας ανίσωσης προσδιορίζεται ως ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, (συνήθως απειροσύνολο), δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα ή μια ημιευθεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

2.2. Ο δυισμός διαδικασίας-αντικειμένου στην περίπτωση των ανισώσεων

Στη βάση της ανάλυσης ιστορικών παραδειγμάτων ανάπτυξης εννοιών αλλά και της θεωρίας γνωστικών σχημάτων, η A. Sfard (1991), υποστηρίζει ότι για τους περισσότερους ανθρώπους, η λειτουργική-διαδικαστική σύλληψη, αποτελεί το πρώτο βήμα στην κατάκτηση νέων μαθηματικών εννοιών. Αυτό το πλαίσιο στηρίζεται στην υπόθεση ότι, η μετάβαση από τις υπολογιστικές διαδικασίες στα αφηρημένα αντικείμενα, δηλαδή η ανάπτυξη/σχηματισμός της έννοιας από τη λειτουργική (operational) στη δομική της αντίληψη (structural conception), πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας που ολοκληρώνεται σε τρία στάδια: Το πρώτο στάδιο είναι η εσωτερίκευση (interiorization) που χαρακτηρίζεται ως η διαδικασία που επιτελείται σε ήδη γνωστά αντικείμενα, το δεύτερο στάδιο είναι η συμπύκνωση (condensation) που συνίσταται στην μετατροπή της προηγούμενης διαδικασίας σε αυτόνομη οντότητα και τέλος, η υποστασιοποίηση (reification) που σχετίζεται με την ανάδυση της ικανότητας να θεωρηθεί αυτή η νέα οντότητα ως ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό αντικείμενο το οποίο έχει κατακτηθεί. Το φαινόμενο της υποστασιοποίησης θεωρείται μια εξαιρετικά σύνθετη νοητική λειτουργία, με εγγενείς δυσκολίες που καθιστούν δύσκολη την κατανόησή του. Τα τρία προηγούμενα στάδια συνιστούν μια ιεραρχία, με την έννοια ότι κάποιο δεν μπορεί να επιτευχθεί αν δεν πραγματοποιηθούν τα προηγούμενα. Στις περιπτώσεις όμως που εμφανίζεται αδυναμία υποστασιοποίησης της έννοιας, ο μαθητής χρησιμοποιεί τα σύμβολα ως αντικείμενα αφεαυτά, χωρίς να κατανοεί ότι αντιπροσωπεύουν κάτι άλλο (Linchevski

& Sfard, 1991). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο μαθητής έχει αναπτύξει μια ψευδοδομική αντίληψη, που αφήνει τη νέα έννοια αποκομμένη από το σύστημα εννοιών που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο στάδιο, με αποτέλεσμα οι δευτερογενείς διαδικασίες, όπως είναι τα βασικά βήματα με τα οποία ο προτασιακός τύπος της εξίσωσης-ανίσωσης μετασχηματίζεται σε ένα άλλο ισοδύναμο προτασιακό τύπο, να μοιάζουν εντελώς αυθαίρετες.

2.3. Διαισθητική γνώση και αλγοριθμικά μοντέλα

Σε έρευνά τους οι Bazzini & Tsamir (2002a,2002b) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές διαισθητικά χρησιμοποιούν την επίλυση των εξισώσεων ως πρότυπο για την επίλυση ανισώσεων. Αναπτύσσουν ένα αλγοριθμικό μοντέλο εξίσωσης για την επίλυση ανισώσεων, το οποίο εκφράζεται κυρίως ως «το να κάνω την ίδια πράξη, με τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη, είναι έγκυρο για κάθε πράξη και για κάθε αριθμό», όχι μόνο στην περίπτωση των εξισώσεων αλλά και των ανισώσεων. Πρόκειται για μια λανθασμένη υπεργενίκευση του μοντέλου της ζυγαριάς (balance model) που απαντάται στις εξισώσεις και στην περίπτωση των ανισώσεων.

2.4. Δυσκολίες, εμπόδια και λάθη στην επίλυση ανισώσεων

Ένα ευρύ φάσμα εμπειρικών ερευνών δείχνει ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες στην κατανόηση της άλγεβρας. Ειδικότερα στην επίλυση ανισώσεων, η έρευνα έχει συνοψίσει τις δυσκολίες των παιδιών στα εξής σημεία (π.χ. Blanco & Carrote, 2007):

- Στο πέρασμα από την καθημερινή γλώσσα στην αλγεβρική με όρους ανισοτήτων,
- Στη χρήση και το νόημα που αποδίδεται στα γράμματα και τις αλγεβρικές εκφράσεις,
- Οι μαθητές συχνά περιορίζουν τις λύσεις τους στους φυσικούς αριθμούς
- Στο χειρισμό εκφράσεων που περιέχουν σχέση διάταξης πραγματικών αριθμών
- Στην κατανόηση της έννοιας του διαστήματος
- Στην κατανόηση των συμβόλων «μεγαλύτερο από» και «μικρότερο από»
- Στην ερμηνεία του αποτελέσματος μιας ανίσωσης
- Στα λειτουργικά λάθη (όπως η χρήση παρενθέσεων, τα σύμβολα των ανισοτήτων, η επιμεριστική ιδιότητα, το πέρασμα από μια ανισότητα σε άλλη ισοδύναμή της)
- Στην έλλειψη διάκρισης μεταξύ εξισώσεων και ανισώσεων.

3. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ-ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός της έρευνας: Σκοπός της έρευνας που δεδομένα της θα παρουσιαστούν εδώ είναι η διερεύνηση των γνώσεων μαθητών της Α' Λυκείου που σχετίζονται με ανισοτικές σχέσεις και ανισώσεις α' βαθμού με ένα άγνωστο. Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο. Εδώ θα αναλυθούν τα ευρήματα τεσσάρων έργων (Παράρτημα). Τα ειδικότερα ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρείται να απαντηθούν είναι τα εξής: Πρώτον, η δυνατότητα των μαθητών να μεταφράζουν από τη λεκτική διατύπωση στη μαθηματική συμβολική γλώσσα με όρους ανισοτήτων (1^o έργο), καθώς και το αντίστροφο (2^o έργο). Δεύτερον, η διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να βρίσκουν με αλγεβρικές πράξεις τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων (3^o έργο), καθώς και να επιλύουν ανισώσεις (4^o έργο). Το 3^o και 4^o έργο παρουσιάζουν ιδιαιτερότητες, αφού η συναλήθευση των ανισώσεων στο 3^o έργο οδηγεί σε μονοσύνολο, ενώ στο 4^o έργο μια εκ των ανισώσεων είναι αδύνατη.

Το δείγμα: Η έρευνα είναι μια επισκόπηση με δείγμα 18 μαθητές και μαθήτριες της Α' Λυκείου σχολείου αγροτικής περιοχής του Νομού Αχαΐας, που επιλέχτηκε μέσω «βολικής» δειγματοληψίας (Cohen & Manion, 1994). Οι μαθητές προέρχονται από οικογένειες αγροτών, κτηνοτρόφων και επαγγελματιών (οικοδομικές εργασίες, μηχανικοί-ηλεκτρολόγοι αυτοκινήτων κ.ά.) και στην πλειονότητά τους δεν είναι ακαδημαϊκά προσανατολισμένοι. Στην έρευνα δεν συμμετείχαν μαθητές με διαγνωσμένες μαθησιακές δυσκολίες. Οι μαθητές του δείγματός μας είχαν διδαχθεί την διάταξη πραγματικών, τις ιδιότητες ανισοτήτων και την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων α' βαθμού. Τους δόθηκε το φυλλάδιο του ερωτηματολογίου και διατέθηκε μία διδακτική ώρα για την συμπλήρωσή του, παρουσία του καθηγητή των Μαθηματικών.

Η βαθμολόγηση του ερωτηματολογίου: Η βαθμολόγηση των ερωτήσεων των έργων έγινε σε μια κλίμακα από το 1 έως το 3. Το 1 αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο μαθητής αφήσει την ερώτηση αναπάντητη ή δίνει εντελώς λανθασμένη απάντηση, το 2 όταν η απάντηση του μαθητή είναι μερικώς σωστή ή ελλιπής και το 3 όταν η απάντησή του θεωρείται πλήρης και σωστή. Η βαθμολόγηση του αντίστοιχου έργου προκύπτει ως η μέση τιμή της βαθμολογίας των ερωτήσεων που περιέχει το έργο. Τα ποσοτικά δεδομένα υπεβλήθησαν σε στατιστική επεξεργασία με το στατιστικό πρόγραμμα SPSS 13.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αναλυτικά τις απαντήσεις για κάθε έργο.

Πρώτο έργο. Ο μη παραμετρικός έλεγχος για περισσότερα από δύο εξαρτημένα δείγματα (test Friedman), υποδεικνύει ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις βαθμολογίες που πέτυχε κάθε μαθητής στις τέσσερις ερωτήσεις του έργου ($X^2(3)=67{,}085$, $p<0{,}001$). Μεγαλύτερη δυσκολία αντιμετώπισαν οι μαθητές στην απάντηση της δεύτερης και τρίτης ερώτησης. Μια ποιοτική ανάλυση των ευρημάτων, ανά ερώτηση, δείχνει τα εξής:

Η *πρώτη ερώτηση* («Ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος του 3») απαντήθηκε με σχετική ευκολία πιθανόν και λόγω της ομοιότητας με το παράδειγμα που δόθηκε. Από τις λανθασμένες απαντήσεις, αξιοσημείωτες είναι κάποιες της μορφής «3<6», όπου είναι εμφανής η αδυναμία των συγκεκριμένων μαθητών να κατανοήσουν τη χρησιμότητα και την αναγκαιότητα της χρήσης μεταβλητών, με αποτέλεσμα να περιορίζονται σε συγκεκριμένα παραδείγματα, δυσκολευόμενοι να γενικεύσουν.

Στη *δεύτερη ερώτηση* («Ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος ή ίσος του -1 και μικρότερος του 4»), η μετατροπή (conversion) από τη λεκτική έκφραση στη συμβολική γραφή, συνοδεύεται από συχνές λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι έχουμε απαντήσεις όπως η «$x \geq -1 \prec 4$», όπου γίνεται μια κατά λέξη-ένα προς ένα-μετάφραση. Μερικοί μαθητές περιορίζονται στη μετάφραση του ενός μόνο μέρους της ανισότητας (π.χ. του μέρους $x \geq -1$ ή του μέρους $x \leq 4$), ενώ άλλοι δεν προχωρούν στη σύνθεση των δύο ανισοτήτων σε μια, αλλά τις παραθέτουν ως δύο διακριτές ($x \geq -1$ χ<4). Και στην περίπτωση της δεύτερης ερώτησης εμφανίζονται απαντήσεις που δεν περιέχουν τη χρήση μεταβλητής, όπως για παράδειγμα: «$-1 \leq 4$».

Στην *τρίτη ερώτηση* («Το διπλάσιο ενός αριθμού είναι μικρότερο του 1»), διαπιστώνονται δυσκολίες κυρίως κατά τη μετάφραση του πρώτου τμήματος της έκφρασης και λιγότερο στο είδος και την φορά του συμβόλου της ανισότητας. Απαντήσεις των μαθητών, όπως η «$\chi^2<1$», δηλώνουν αδυναμία απόδοσης νοήματος στο σύμβολο της δύναμης, που οδηγεί συχνά τους μαθητές να ταυτίζουν το χ^2 με το 2χ. Επίσης και στην τρίτη ερώτηση συναντάμε περιπτώσεις μαθητών που δεν προσφεύγουν στη χρήση μεταβλητών και δίνουν απαντήσεις όπως η «2<1».

Στην *τέταρτη ερώτηση* («Το -2 είναι μεγαλύτερο ή ίσο από ένα αριθμό»), το γεγονός ότι η σταθερά προηγείται της μεταβλητής, αποτελεί πηγή δυσκολίας. Οι μαθητές εδώ συνέδεσαν τα -2 και χ με όλα τα δυνατά σύμβολα (της ισότητας, ανισότητας και ανισοϊσότητας), καθώς και με όλους σχεδόν τους δυνατούς τρόπους. Δεν έλειψαν και εδώ απαντήσεις χωρίς τη χρήση μεταβλητής, όπως για παράδειγμα η «2>-1».

Δεύτερο έργο. Ο μη παραμετρικός έλεγχος για περισσότερα από δύο εξαρτημένα δείγματα, test Friedman, υποδεικνύει ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις βαθμολογίες που πέτυχε κάθε μαθητής στις τέσσερις ερωτήσεις του έργου ($X^2(3)=29{,}658$, $\rho<0{,}001$). Είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην απάντηση κυρίως της τρίτης και δευτερευόντως της τέταρτης ερώτησης. Η ποιοτική ανάλυση των καταγεγραμμένων απαντήσεων των μαθητών δείχνουν αναλυτικότερα κατά ερώτηση τα εξής:

Η *πρώτη ερώτηση* (λεκτική περιγραφή της «$x \geq 5$»), απαντήθηκε από την πλειονότητα των μαθητών (15 μαθητές). Κάποιες από τις λανθασμένες απαντήσεις, όπως ότι «το χ είναι μικρότερο και ίσο στο 5» δηλώνουν απλώς, μια προσπάθεια προσαρμογής της απάντησης στο παράδειγμα που δίνεται σ' αυτό το έργο.

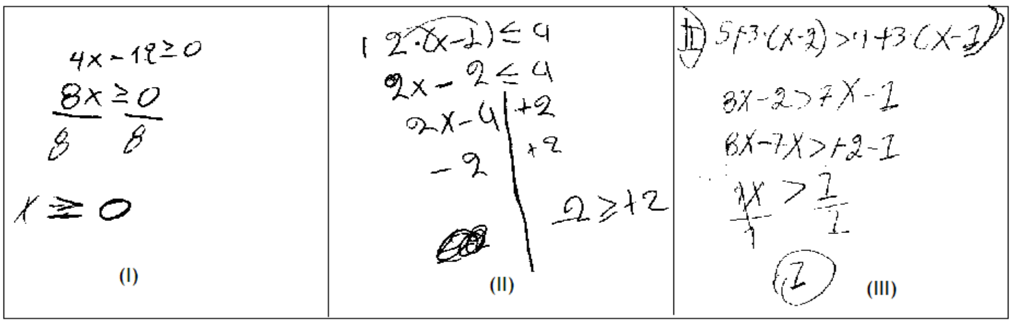
Στην *δεύτερη ερώτηση* (λεκτική περιγραφή της «-2>α»), η προσπάθεια να καταγραφεί λεκτικά πρώτα η μεταβλητή, οδηγεί σε λάθος απαντήσεις, όπως η απάντηση: «ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος του -2». Κάποιες απαντήσεις όπως: «το -2 είναι μεγαλύτερο από το α» ή «το 2 είναι μεγαλύτερο από το γράμμα α», αντικατοπτρίζουν τη χρήση του γράμματος στην άλγεβρα ως αντικειμένου. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση «ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από το α», στην οποία διαφαίνεται μια χρήση του γράμματος ως αντικειμένου, με την αδυναμία κατανόησης της ερώτησης.

Η σαφώς μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην απάντηση της *τρίτης ερώτησης* (λεκτική περιγραφή της «$-3 \leq \beta < 5$») σχετιζόταν με τη διπλή ανισότητα. Αρκετοί από τους μαθητές που προσπάθησαν να περιγράψουν την ανισότητα ξεκινώντας από τη μεταβλητή, έκαναν λάθη ανάγνωσης. Για παράδειγμα: «Ένας αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος του -3 και μικρότερος του 5». Οι περισσότεροι μαθητές (11 μαθητές) έκαναν μια ένα-προς-ένα απόδοση της σχέσης και βρέθηκαν σε πλεονεκτική θέση, χρησιμοποιώντας όμως συχνά ατυχείς εκφράσεις όπως: «το -3 είναι μικρότερο ή ίσο ενός αριθμού και μικρότερο του 5».

Στην *τέταρτη ερώτηση* (λεκτική περιγραφή της «χ+5>3»), πολλοί μαθητές δίνουν απαντήσεις της μορφής: «το χ+5 είναι μεγαλύτερο του 3» στις οποίες αποδίδεται λεκτικά η ανισότητα (άλλες φορές σωστά, άλλες λάθος), όχι όμως και η παράσταση χ+5. Η δυσκολία της πλειονότητας των μαθητών (10 μαθητές) λεκτικής απόδοσης της αλγεβρικής σχέσης καταφαίνεται στην περίπτωση της επόμενης απάντησης: «αν σ' έναν αριθμό προστεθεί το 5 θα είναι μεγαλύτερος από το 3».

Τρίτο έργο. Στο έργο αυτό (καθώς και στο τέταρτο), αναδεικνύονται οι δυσκολίες των μαθητών του δείγματός μας να χειριστούν τις αναγκαίες αλγεβρικές πράξεις. Συχνά οι μαθητές αντιμετωπίζουν αδιάκριτα τις εξισώσεις με τις ανισώσεις, φθάνοντας στο σημείο να εναλλάσσουν αυθαίρετα τα σύμβολα εξίσωσης και ανίσωσης ή και να τα παραλείπουν παντελώς .

Υπάρχουν εμπόδια που σχετίζονται με την «αποδοχή έλλειψης τερματισμού» (lack of closure obstacle, Collis, 1974), δηλαδή της συνέχισης της διαδικασίας ακόμη και στις περιπτώσεις που αυτό δεν είναι εφικτό (π.χ. σχήμα (I),(II)). Επίσης, δυσκολίες εντοπίζονται στο αλγεβρικό άθροισμα ρητών. Η όλη διαδικασία φαίνεται ότι εκτελείται μηχανικά από τους μαθητές, χωρίς να την κατανοούν και φυσικά δεν υφίσταται έκφραση καμιάς μεταγνωστικής δεξιότητας ως προς το αποτέλεσμα, ούτε και προσπάθεια ερμηνείας του.



Σχήμα: Ελλιπής ικανότητα εκτέλεσης αλγεβρικών πράξεων

Τέλος, η δυσκολία να αποδεχτούν οι μαθητές ως αποτέλεσμα της συναλήθευσης των δύο ανισώσεων ένα μονοσύνολο, είναι εμφανής στις περιπτώσεις μαθητών που ενώ λύνουν σωστά τις ανισώσεις, αδυνατούν να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα και να δεχθούν ως απάντηση το χ=3.

Τέταρτο έργο. Στο έργο αυτό αναδεικνύονται οι δυσκολίες των μαθητών στο χειρισμό του αντικειμένου των ανισώσεων, καθώς και των αλγεβρικών πράξεων. Ένα χαρακτηριστικό λάθος είναι η μεταφορά όρων από το ένα μέλος της ανίσωσης στο άλλο, χωρίς αλλαγή των προσήμων. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μη ισοδύναμο μετασχηματισμό, που μπορεί να ερμηνευθεί με την αποτυχία των μαθητών να υποστασιοποιήσουν την έννοια της ανίσωσης ως αφηρημένο αντικείμενο, γεγονός που αφήνει ασύνδετες τις πρωταρχικές διαδικασίες (αριθμητικές πράξεις που έχουν κωδικοποιηθεί στους τύπους των δύο μελών τους) με τις δευτερογενείς διαδικασίες (βασικά βήματα με τα οποία ο προτασιακός τύπος της ανίσωσης μετασχηματίζεται σε ένα άλλο ισοδύναμο προτασιακό τύπο). Άλλο επίσης χαρακτηριστικό λάθος είναι η μη αλλαγή στη φορά της ανίσωσης, όταν γίνεται διαίρεση των μελών με αρνητικό αριθμό. Πρόκειται ουσιαστικά για μια λανθασμένη υπεργενίκευση της διαδικασίας επίλυσης εξισώσεων και στην περίπτωση των ανισώσεων, γεγονός που επισημαίνεται και στη βιβλιογραφία (π.χ. Bazzini & Tsamir, 2002a,2002b). Εδώ γίνεται σε κάποιες απαντήσεις φανερή η αντίληψη του συμβόλου της ισότητας, ως λειτουργικού συμβόλου της μορφής «κάνε κάτι» και όχι ως συμβόλου ισοδυναμίας. Επιπλέον, εδώ παρατηρείται η εμφάνιση του εμποδίου που στη βιβλιογραφία καταγράφεται ως εμπόδιο της «αναμενόμενης απάντησης» (expected answer obstacle, Kieran, 1981, Tall & Thomas, 1991). Το εμπόδιο αυτό εντοπίζεται σε περιπτώσεις που τα παιδιά συνηθισμένα να βρίσκουν αριθμητικές απαντήσεις σε μαθηματικά προβλήματα, προσδοκούν ότι το ίδιο θα συμβαίνει και σε αλγεβρικά προβλήματα.

Συχνές, επίσης, είναι οι περιπτώσεις, όπου ο μαθητής εκτελεί τις πράξεις με την σειρά που διαβάζονται και γράφονται, δηλαδή από τα αριστερά προς τα δεξιά, αγνοώντας την προτεραιότητα των πράξεων στην άλγεβρα, γεγονός που μπορεί να ερμηνευθεί ως έκφραση της αντίθεσης μεταξύ μιας βαθειά ριζωμένης υπονοούμενης κατανόησης της φυσικής γλώσσας και του αλγεβρικού συμβολισμού, όπως στην περίπτωση του σχήματος (III). Στην περίπτωση του συγκεκριμένου παραδείγματος παρατηρείται ότι η χρήση της παρένθεσης δεν γίνεται κατανοητή, με αποτέλεσμα να παραλείπεται (δεν γίνεται καμιά προσπάθεια εφαρμογής της επιμεριστικής ιδιότητας). Στο τέλος παραλείπεται και η μεταβλητή.

Χαρακτηριστική, τέλος, είναι η δυσκολία της πλειονότητας των μαθητών να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξαν, είτε αυτό είναι σωστό, είτε λανθασμένο. Η πεποίθηση ενός μαθητή να βρει ως αποτέλεσμα της λύσης μιας ανίσωσης, επίσης μια ανίσωση, τον οδηγεί στο να θεωρήσει ότι: «3χ-3χ=χ».

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όπως προέκυψε από την ανάλυση των ευρημάτων, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση των συστηματικών λαθών των μαθητών: Λάθη στους κανόνες προσήμων, στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, στην απαλοιφή παρενθέσεων και την επιμεριστική ιδιότητα, στην κατανόηση των συμβόλων «<», «>», «≤», «≥» καθώς και στη λειτουργική ερμηνεία του συμβόλου της ισότητας. Οι μαθητές συχνά, δεν κατανοούν τη διαφορά εξίσωσης και ανίσωσης, θεωρώντας ως τη μόνη μεταξύ τους διάκριση, το διαφορετικό σύμβολο που συνδέει τα δύο μέλη της εξίσωσης ή της ανίσωσης αντίστοιχα. Τα σύμβολα αυτά επίσης, «<», «>», «≤», «≥», «=», συχνά δεν γίνονται κατανοητά με αποτέλεσμα να υποβιβάζονται στη σκέψη των μαθητών στον ρόλο απλού συνδέσμου μεταξύ των δύο μελών και να εναλλάσσονται κατά βούληση. Έτσι μια ανίσωση στην πορεία επίλυσής της μετατρέπεται σε εξίσωση.

Η αδυναμία των μαθητών να επενδύσουν με νόημα τις ενέργειές τους, είναι αισθητή στην προσπάθεια μηχανιστικής εφαρμογής αλγορίθμων και κατά συνέπεια στη μεγάλη δυσκολία που αντιμετωπίζουν όταν καλούνται να εργαστούν σε ένα σύστημα αναπαράστασης πέραν του συμβολικού. Οι παραπάνω δυσκολίες διαπιστώθηκαν κατά την εφαρμογή αυτής της δεξιότητας στη συναλήθευση ανισώσεων. Μεγάλες όμως ήταν και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά την μετάφραση από την καθημερινή γλώσσα στην μαθηματική συμβολική γραφή και αντιστρόφως, με αιχμή τις ερωτήσεις που σχετίζονταν με την διατύπωση διπλών ανισοτήτων.

Συμπερασματικά, οι αδυναμίες και ανεπάρκειες των μαθητών του δείγματός μας να ανταποκριθούν σε απλά έργα ανισοτικών σχέσεων και ανισώσεων, δημιουργούν έντονο προβληματισμό για τον προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης στη χώρα μας, τους στόχους που θέτει, καθώς και την ακολουθούμενη διδακτική μεθοδολογία. Τα ερωτήματα που προβάλλουν είναι επιτακτικά και χρήζουν στοιχειοθετημένης απάντησης ώστε η μαθηματική εκπαίδευση που προσφέρουμε να ανταποκριθεί στις προκλήσεις της περιόδου.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bagni, G. (2004). Inequalities and equations: History and didactics. Retrieved from http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/6/Bagni.pdf

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2002a). Connections between theory and research findings: The case of inequalities. Retrieved from http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_bazz/BAZZ&03.pdf.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2002b). Students' algorithmic, formal and intuitive knowledge: The case of inequalities. Retrieved from http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap511.pdf.

Blanco, L., & Carrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 3*(3), 221-229.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής έρευνας. Αθήνα: Μεταίχμιο.
Collis, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning. Paper presented at the *Psychology of Mathematics Education Workshop,* Center for Science Education, Chelsea College, London.
Kieran, C. (1981). Pre-algebraic notions among 12 and 13 year olds. *Proceedings of PME 5,* Grenoble. 158-164.
Linchevski, L., & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects-the case of inequalities. Paper presented at the *Proceedings of PME 15,* Assisi, Italy. *, II* 317-324.
NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Virginia.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.
Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 125-147.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1ο έργο. Γράψτε με σύμβολα τις παρακάτω εκφράσεις:

Ένας αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος του 2	$x \le 2$
Ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος του 3	
Ένας αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος του 2	
Το διπλάσιο ενός αριθμού είναι μικρότερο του 1	
Το -2 είναι μεγαλύτερο ή ίσο από ένα αριθμό.	

2ο έργο. Αποδώστε με λόγια τις παρακάτω συμβολικές εκφράσεις ανισοτήτων:

$\kappa < 0$	Ένας αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
$x \ge 5$	
$-2 > a$	
$-3 \le \beta < 5$	
$x + 5 > 3$	

3ο έργο. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$4x - 12 \geq 0 \text{ και } 2 \cdot (x-1) \leq 4$$

4^o έργο. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις των παρακάτω ανισώσεων:

$$2x + 8 \geq 5x - 4$$

$$5 + 3 \cdot (x-2) > 4 + 3 \cdot (x-1)$$